D1 – Gravitation

24 juin 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

➢

Expériences

☕ Chute réglette

Table des matières

Des cours avec le détail des calculs ici et ici.

Introduction

La gravité est sans doute la première des quatre interactions fondamentales à avoir été étudiée par l'humanité.
Déjà durant l'antiquité, Aristote tentait d'expliquer la chute des corps par l'affinité des éléments avec leur sphère de prédilection. La sphère centrale pour la terre, puis celle de l'eau, puis celle de l'air, et enfin celle du feu.
Ainsi, les flammes montent, les pierres coulent, les bulles d'air remontent à la surface...
Il faut attendre Newton et le calcul différentiel pour qu'on comprenne que la force de gravité qui fait tomber les pommes et la même que celle qui fait tourner les astres.

1 Loi de la gravitation

1.1 Kepler

En 1619, Kepler publie ça célèbre 3ème loi : celle des périodes. Elle stipule que, dans le Système Solaire, les périodes des planètes sont reliées à leurs distance au Soleil par la loi :

$$\frac{r^3}{T^2} = k = cnst \tag{1}$$

1.2 Newton

En 1687, dans *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Newton publie ça loi de la gravitation. Il remarque que, d'après la loi de Kepler, les planètes subissent une accélération centrale de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -r\dot{\theta}^2 = -r\frac{4\pi^2}{T^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{4\pi^2 k}{r^2}\overrightarrow{u_r} \tag{2}$$

Expérience quantitative

Le même type d'accélération se produit-il pour les objets autours de la Terre ? La Lune, située à 384000 km, subit une accélération de $-4\pi^2 r/T^2 = -0.0027$ m/s^2. Une pomme à la surface (6400km du centre) subit aussi une accélération : si on la lâche, elle tombe. Observons la chute d'une réglette trouée devant un capteur relié à une carte d'acquisition LatisPro. La feuille de calcul (voir le fichier LatisPro joint) permet de convertir le signal reçut en une mesure position/temps de la réglette. On peut ensuite utiliser ces mesures pour estimer l'accélération subit par la réglette (voir feuille de calcul).
On trouve une accélération de 9.8 m/s^2. La réglette est 60 fois plus proche de centre de la Terre que la Lune, et elle subit une accélération 3600 fois plus forte.
La chute d'un objet sur Terre, la rotation de la Lune autours de la Terre et celles des planètes autours du Soleil semblent tous découler d'une même loi physique.

Tout se passe comme si les planètes subissaient une force centrale évoluant comme l'inverse de la distance au carré. D'après la seconde loi de Newton :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F} \tag{3}$$

Comme l'accélération subit par les astres ne semble pas dépendre de leur masse, on en déduit que ici, la force doit être proportionnelle à la masse. On a donc :

$$\overrightarrow{F} \propto -\frac{m}{r^2}\overrightarrow{u_r} \tag{4}$$

La troisième loi de Newton nous dit que la force exercée par la Terre sur la pomme est égale à la force exercé par la pomme sur la Terre. Il faut donc symétriser notre équation. On obtient que deux masses m_1 et m_2 exerce l'une sur l'autre une force attractive de la forme :

$$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -\overrightarrow{F}_{2\to 1} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{1\to 2} \tag{5}$$

Où G est la constante de gravitation. Cette dernière ne sera mesurée qu'en 1798 par Henry Cavendish. Elle est évaluée à 6.67 10^{-11} m^{3}kg^{-1}s^{-2}

2 Problème à deux corps

Soit deux corps de masse respective m_1 et m_2 s'attirant mutuellement.

On se place dans le référentiel du centre de masse (on montre facilement que le centre de masse ne subit pas d'accélération, ce référentiel est donc galiléen).

On pose $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ Par loi des barycentre, on a $\overrightarrow{r_1} = -m_2/(m_1+m_2)\overrightarrow{r}$ ainsi que $\overrightarrow{r_2} = m_1/(m_1+m_2)\overrightarrow{r}$.

On applique la force de gravitation sur le vecteur $\overrightarrow{r}$. On obtient, avec μ la masse réduite :

$$\mu\ddot{\overrightarrow{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{||\overrightarrow{r}||^2}\overrightarrow{u_r} \qquad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{6}$$

Nous nous sommes ramené au problème dans corps subissant une force centrale.

Voir les pdf des calculs pour le détail.

2.1 Loi des aires

Voir pdf

2.2 Potentiel effectif

Voir pdf

2.3 Aspect énergétique : géométrie de la trajectoire

Voir pdf

2.4 Lien entre énergie, période et demi-grand axe

On retrouve Kepler, voir pdf

3 Pour aller plus loin

3.1 Problème à trois corps

Particule de masse négligeable orbitant autours de deux corps. Point de Lagrange

3.2 Les marées

Gravitation sur un corps non ponctuelle

3.3 Planète en rotation

Déformation infinitésimal d'un corps sphérique en rotation.

Ellipsoïde de Jacobi

Conclusion

Aujourd'hui, nous avons vu en long, en large, et en travers, la gravitation classique.

Celle-ci permet d'expliquer énormément de phénomène spatiaux. Elle a notamment permis à Le Verrier de découvrir la planète Neptune grâce aux anomalie dans la trajectoire d'Uranus.

Il n'a par contre jamais pu trouver Vulcain, l'hypothétique planète sensée expliquer l'avancée du périhélie de Mercure.

Pour expliquer ce phénomène, il faudra atteindre Einstein et la relativité générale.

Code LatisPro

m=16.25E-3 taille=0.003 t=Seuil(EA0 ;1.250 ;0) z=-Rampe(0 ;100 ;101)*taille v=Deriv(z ;t ;5) Ec=0.5*m*v*v Ep=m*9.81*z Et=Ep+Ec t2=t*t