

PROBLÈME À DEUX CORPS

9

Le problème à deux corps désigne la situation où un système mécanique peut se ramener à deux corps ponctuels en interaction et isolé de l'extérieur. C'est par exemple la situation rencontrée dans les systèmes planète-étoile. On montrera que l'étude de ce problème se réduit à celle d'un corps soumis à une force centrale.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/probleme-a-deux-corps.php>

9.1 Réduction du problème à deux corps	105
Mobile réduit	105
Point de vue énergétique	107
9.2 Exemples d'application	108
Problème de Képler	108
Détection des exoplanètes	110
Vibrations moléculaires	112

9.1 Réduction du problème à deux corps

Mobile réduit et masse réduite

Considérons un système mécanique \mathcal{S} formé de deux points matériels M_1 et M_2 de masse respective m_1 et m_2 . On étudie la dynamique de ce système dans un référentiel \mathcal{R} galiléen et l'on note $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ les vecteurs positions. Nous allons montrer que lorsque le système est isolé, le problème se découple en deux mouvements indépendants.

Supposons donc que les deux corps soient en interaction mutuelle mais isolés de l'extérieur. On conserve la notation habituelle : \vec{f}_{12} désigne la force qu'exerce le point M_1 sur M_2 et \vec{f}_{21} celle produite par M_2 sur M_1 . Le principe des actions réciproques postule que ces deux forces sont opposées et coaxiales. Par ailleurs, en vertu du théorème du centre d'inertie, on a

$$(m_1 + m_2) \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$$

Ainsi, le centre d'inertie G décrit une trajectoire rectiligne uniforme. Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} ce qui lui confère un caractère galiléen. Analysons donc le mouvement dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} = \vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} = \vec{f}_{12} \end{cases}$$

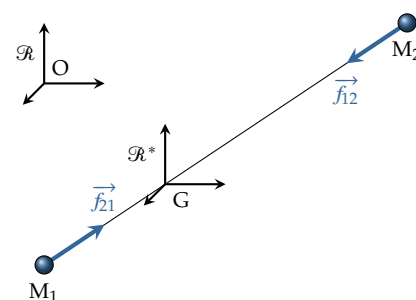


FIGURE 9.1 – Système à deux corps

Si l'on divise chaque équation par la masse et que l'on soustraie l'une à l'autre, on obtient

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = \overrightarrow{f_{12}} \quad \heartsuit \quad (9.1)$$

ce qui s'interprète comme l'équation du mouvement d'un corps fictif M , appelé **mobile réduit**, de masse μ , de vecteur position $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GM}$ et soumis à une force \overrightarrow{f} tels que

$$\mu \frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{f} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1 M_2} \\ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_{12}} \end{cases} \quad \heartsuit \quad (9.2)$$

La masse μ , appelée **masse réduite**, est toujours plus petite que la plus petite des masses m_1 et m_2 . En résumé, le problème à deux corps se découple en deux mouvements indépendants.

1. Le mouvement du centre d'inertie qui est un simple mouvement rectiligne uniforme.
2. Le mouvement relatif qui correspond au mouvement du mobile réduit M de masse μ soumis à une force centrale \overrightarrow{f} . En conséquence, le mouvement relatif est plan et on a conservation du moment cinétique de M ($r^2 \dot{\theta} = C^{\text{te}}$).

Retour sur la chute libre – Selon le principe d'équivalence, la chute libre est, dans un référentiel galiléen, indépendante de la masse du corps en chute libre. Cependant, un observateur lié à un astre faisant l'expérience de la chute libre et disposant d'une précision infinie, constatera que la chute libre dépend de la masse du corps. En effet, la chute d'un corps de masse m sur un astre de masse m_A peut se voir comme un problème à deux corps et, comme on vient de le voir, l'astre est accéléré par le corps en chute libre, le rendant ainsi non galiléen. On sait que le mouvement relatif est décrit par le mobile réduit de masse

$$\mu = \frac{m m_A}{m + m_A}$$

dont l'équation du mouvement est

$$\mu \frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = m \overrightarrow{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{g} \left(1 + \frac{m}{m_A} \right)$$

L'accélération du corps en chute libre dépend donc du rapport m/m_A . Bien entendu, c'est la précision limitée qui rend cet effet non mesurable. La meilleure précision obtenue dans les tours à vide étant de l'ordre de 10^{-12} il faudrait faire l'expérience avec une masse $m > 10^{-12} m_A$ pour rendre cet effet mesurable, soit, pour une expérience terrestre, $m > 10$ milliards de tonnes !

Résoudre l'équation différentielle (9.1) permet d'obtenir le mouvement de M_2 relativement à M_1 . Quant au mouvement d'ensemble (celui du centre d'inertie), il suffit de connaître la vitesse du centre d'inertie à un instant quelconque pour connaître le mouvement d'ensemble. Une fois le mouvement relatif connu, il est aisé d'accéder aux mouvements

de M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique. En effet, on a

$$\begin{cases} m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \\ \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM} \end{cases}$$

On remarque ainsi que le mouvement de M_2 (resp. M_1) se déduit de celui du mobile réduit par une homothétie de centre G et de rapport $m_1/(m_1 + m_2)$ (resp. $-m_2/(m_1 + m_2)$).

Point de vue énergétique

On peut retrouver les résultats précédents à l'aide d'une approche énergétique. En vertu du théorème de Kœnig, l'énergie cinétique du système s'écrit

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 + \mathcal{E}_c^*$$

où \mathcal{E}_c^* désigne l'énergie cinétique barycentrique. Ici, cette quantité vaut

$$\mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2}m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2}m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_G)^2$$

Or, selon la définition du centre d'inertie G , on a $(m_1 + m_2)\vec{v}_G = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ de sorte que

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_G = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_M$$

puisque $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ vaut $d\overrightarrow{M_1M_2}/dt$, soit la vitesse du mobile réduit M . En procédant de la même façon, on trouve

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_M$$

L'énergie cinétique d'un système à deux corps s'écrit donc

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 + \left[\frac{1}{2}m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] v_M^2$$

Finalement, on trouve

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 + \frac{1}{2}\mu v_M^2 \quad \heartsuit \quad (9.3)$$

Le travail des forces qui agissent sur le système se résume au travail des forces internes puisque le système est isolé. On a donc

$$W = W^{\text{int}} = \int_i^f \vec{f}_{12} \cdot d\overrightarrow{OM_2} + \int_i^f \vec{f}_{21} \cdot d\overrightarrow{OM_1}$$

où i et f désignent les états initial et final. Sachant que les forces internes sont opposées, on trouve

$$W = \int_i^f \vec{f}_{12} \cdot d\overrightarrow{M_1M_2} = \int_i^f \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Le travail des forces qui agissent sur un système à deux corps correspond au travail dépensé par la force qui agit sur le mobile réduit M .

Appliquons maintenant le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta \left(\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_G^2 + \frac{1}{2} \mu v_M^2 \right) = \int_i^f \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

et n'oublions pas que le centre d'inertie se déplace à une vitesse \vec{v}_G constante de sorte que le théorème précédent prend la forme

$$\Delta \left(\frac{1}{2} \mu v_M^2 \right) = \int_i^f \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad \heartsuit \quad (9.4)$$

Il s'agit de l'équation du mouvement du mobile réduit écrit sous forme énergétique. On retrouve donc le fait que le mouvement relatif ($\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$) se réduit à celui du mobile réduit.

Remarque : Si la force centrale \vec{f} dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p , le théorème de l'énergie cinétique aboutit à la conservation de l'énergie mécanique suivante :

$$\frac{1}{2} \mu v_M^2 + \mathcal{E}_p = C^{\text{te}}$$

9.2 Exemples d'application

Retour sur le problème de Képler

Dans le chapitre sur les forces centrales, nous avons introduit le problème de Kepler en considérant le mouvement d'un astre (appelons le M_2) autour d'un astre fixe (M_1). En réalité, les deux astres sont en mouvement autour de leur centre d'inertie et l'on ne peut négliger le mouvement de M_1 que si $m_1 \gg m_2$. Or, ce qui se justifie pour le système Terre-Soleil ($m_1/m_2 \simeq 3.10^5$) ou le système Terre-Satellite ($m_1/m_2 \simeq 10^{21}$) ne se justifie pas nécessairement pour un système d'étoiles doubles où les masses sont comparables. Le problème de Kepler est en fait un problème à deux corps. Voyons donc quelles modifications il faut apporter aux résultats du [Chapitre 7](#).

En premier lieu, le mobile réduit est régi par l'équation

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{\mathcal{G} m_1 m_2 \vec{r}}{r^3} \quad \implies \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{\mathcal{G} (m_1 + m_2) \vec{r}}{r^3} \quad (9.5)$$

On obtient la même équation que celle traitée dans le [Chapitre 7](#) à une nuance près : la masse m_1 est remplacée par $m_1 + m_2$. En d'autres termes, pour le mouvement relatif de M_2 par rapport à M_1 il suffit de reprendre les résultats du [Chapitre 7](#) et de procéder à la substitution suivante :

$$m_1 \longrightarrow m_1 + m_2$$

Nous savons donc que la solution est une conique de foyer G et d'équation

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} \\ e \geq 0 \end{cases} \quad \heartsuit \quad (9.6)$$

où l'excentricité e et la constante des aires C sont déterminées par les conditions initiales. Les mouvements de M_1 et M_2 se déduisent par l'homothétie décrite au [Section 9.1](#). Par exemple, si dans \mathcal{R}^* le mobile réduit décrit une ellipse d'excentricité e et de grand-axe a , alors M_1 et M_2 décrivent des ellipses homothétiques de même excentricité (cf. [Figure 9.2](#)).

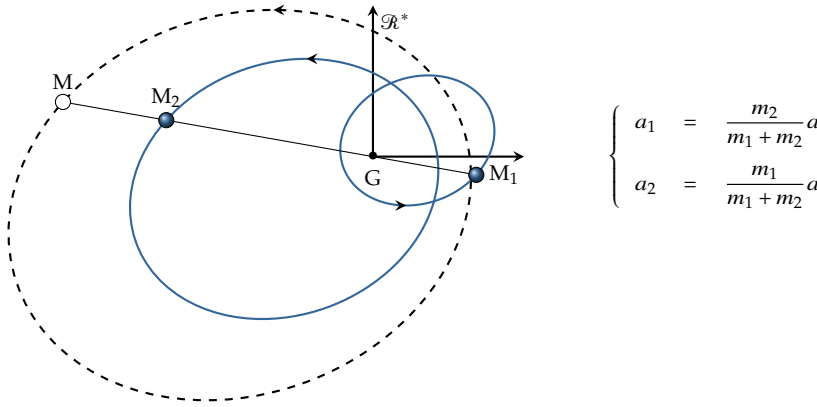


FIGURE 9.2 – Trajectoires de deux corps en interaction newtonienne dans le référentiel barycentrique. Ici $m_1 = 2m_2$. La trajectoire du mobile réduit est tracée en pointillée.

Quant à la troisième loi de Kepler $a^3/T^2 = \mathcal{G}m_1/4\pi^2$, elle devient

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \quad \heartsuit \quad (9.7)$$

Ainsi, le rapport du cube du demi-grand axe et du carré de la période de révolution nous renseigne sur la *masse totale du système*.

Terminons par les relations énergétiques. Dans le référentiel barycentrique, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$\frac{1}{2}\mu v_M^2 - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r} = \mathcal{E}_m^*$$

Or, le mouvement relatif étant plan, on décrit M dans le système de coordonnées polaires (r, θ) et l'on a $\vec{v}_M = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ ainsi que $r^2\dot{\theta} = C$ par conservation du moment cinétique. On obtient alors

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r} = \mathcal{E}_m^*$$

Considérons le cas où les deux corps sont liés par gravitation de sorte que leur trajectoire est elliptique. Dans ce cas, le mobile réduit décrit également une ellipse de demi-grand axe a . Lorsque ce mobile atteint son apocentre ou son péricentre on a $\dot{r} = 0$ et la conservation de l'énergie s'écrit

$$r^2 + \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mathcal{E}_m^*}r - \frac{\mu C^2}{2\mathcal{E}_m^*} = 0$$

équation du second degré qui admet deux solutions r_+ et r_- dont la somme $r_+ + r_-$ vaut $-\mathcal{G}m_1m_2/\mathcal{E}_m^*$. Sachant que $r_+ + r_- = 2a$, on obtient

$$\mathcal{E}_m^* = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2a}$$

Autrement dit, on retrouve le même formule que celle du [Chapitre 7](#) à ceci près qu'il ne s'agit pas de l'énergie mécanique du corps M_2 mais de l'énergie mécanique barycentrique du système des deux corps. On peut montrer qu'on retrouve les mêmes formules également dans le cas d'une trajectoire parabolique et hyperbolique. On retiendra donc le résultat suivant

$$\mathcal{E}_m^* = \begin{cases} -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2a} & \text{dans le cas d'une ellipse,} \\ +\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2a} & \text{dans le cas d'une hyperbole,} \\ 0 & \text{dans le cas d'une parabole,} \end{cases} \quad \heartsuit \quad (9.8)$$

Détection des exoplanètes par mesure de vitesse radiale

62: c'est-à-dire des planètes gravitant autour d'une autre étoile que le Soleil. On emploie également le terme *exoplanètes*.

63: Par exemple, Jupiter brille 1 milliard de fois moins que le Soleil dans le visible et 100 000 fois moins dans l'infrarouge.

En l'espace de 20 ans, plus de 3 000 planètes extrasolaires⁶² ont été découvertes. Toutes l'ont été de façon indirecte. Il faut savoir que l'observation directe d'une planète extra-solaire présente deux difficultés majeures.

1. D'une part, la lumière émise par la planète est complètement masquée par la luminosité de son étoile⁶³.
2. D'autre part, le pouvoir de résolution des télescopes ne permet pas de résoudre le diamètre angulaire du couple planète-étoile.

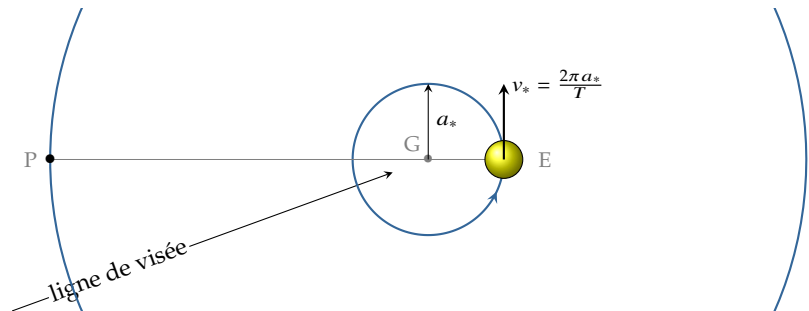
Il y a essentiellement deux techniques utilisées : l'une utilisant la mesure photométrique, l'autre la mesure de la vitesse radiale stellaire. À l'heure actuelle (sept. 2015), 30% des exoplanètes ont été découvertes par cette dernière méthode. Décrivons en le principe.

64: cf. <https://femto-physique.fr/optique/doppler.php>

65: On mesure des variations de l'ordre de 10 m.s^{-1} ce qui, comparé aux vitesses cosmiques, est extrêmement faible. On voit donc que cette méthode exige un très bon rapport signal/bruit.

En observant le spectre d'une étoile avec un spectromètre de très grande précision, on est capable d'observer par effet Doppler⁶⁴, les oscillations⁶⁵ de sa vitesse projetée sur la ligne de visée, dite *vitesse radiale*. En effet, l'étoile et sa planète tournent autour du centre d'inertie du système planète-étoile de sorte que la vitesse radiale oscille avec une période T correspondant à la période orbitale de la planète.

FIGURE 9.3 – Le mouvement orbital d'une planète induit une variation périodique de la vitesse de l'étoile selon la ligne de visée.



Prenons l'exemple de la première exoplanète découverte en 1995 et située à 51 al dans la constellation de Pégase. Admettons –ce qui est

le cas— que son orbite est quasi circulaire. De la courbe de vitesse (cf. Figure 9.4), il est alors possible de déduire différents paramètres.

- Les oscillations de la vitesse permettent de penser qu'il existe une planète de masse m qui tourne autour de l'étoile à la distance a . La période d'oscillation correspond à la période orbitale de la planète. On trouve ici $T = 4,233$ jours.
- Le demi-grand axe de l'orbite planétaire a est obtenu via la troisième loi de Kepler

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(m_\star + m)}{4\pi^2} \simeq \frac{\mathcal{G}m_\star}{4\pi^2} \quad \text{car } m \ll m_\star$$

Connaissant la masse de l'étoile à partir de sa luminosité (modèle stellaire), il est alors aisé de déduire le demi-grand axe a de l'orbite planétaire. Ici l'étoile 51Pegasi présente une masse $m_\star = 1,06 M_\odot$ d'où $a = 0,052$ ua soit 7,8 millions de km.

- La masse de la planète est déduite de l'amplitude de variation de la vitesse. En effet, l'étoile décrit une orbite circulaire autour de G, de rayon

$$a_\star = \frac{m}{m_\star + m} a \simeq \frac{m}{m_\star} a$$

Ainsi, la vitesse projetée dans la ligne de visée, oscille entre v_{\max} et $-v_{\max}$ avec

$$v_{\max} = \frac{2\pi a_\star}{T} = \frac{m}{m_\star} \frac{2\pi a}{T} \quad (9.9)$$

ce qui permet de déduire la masse de la planète. Ici, l'amplitude de vitesse vaut $v_{\max} = 56,83 \text{ m.s}^{-1}$ d'où

$$\frac{m}{m_\star} = 4,2 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad m = 8,4 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

soit environ la moitié de la masse de Jupiter.

Plusieurs ingrédients viennent cependant compliquer l'analyse de la courbe de vitesse. Tout d'abord, la trajectoire n'est pas nécessairement circulaire; plus souvent elle présente une excentricité qu'il s'agit de déterminer. Dans ce cas, la courbe n'est plus sinusoïdale. On peut montrer que la vitesse radiale évolue au cours du temps suivant la loi

$$v_r(t) = A [\cos(\theta + \theta_0) + e \cos \theta_0] \quad \text{avec} \quad \theta - 2e \sin \theta = \frac{2\pi}{T}(t - t_p)$$

expression dans laquelle θ_0 représente la longitude du péricentre et t_p , le temps de passage au péricentre. L'ajustement des données à cette loi permet d'extraire 5 paramètres : l'amplitude de vitesse A , la période T , l'instant t_p , l'excentricité e et l'argument θ_0 . À partir de l'amplitude il est alors possible de déduire la masse de la planète. On peut montrer que pour de petites excentricité (e^2 négligeable devant 1) la relation (9.9) reste valide.

Une autre complication vient du fait que la ligne de visée n'est pas forcément contenue dans le plan de l'orbite. À priori, on ignore l'inclinaison i que forme le plan de l'orbite avec la route céleste (plan perpendiculaire à la ligne de visée). Il faut alors remplacer dans les

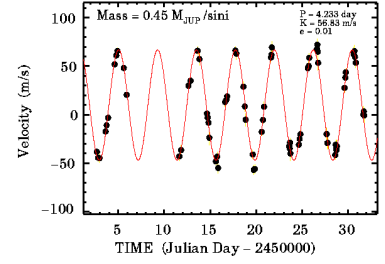


FIGURE 9.4 – Évolution de la vitesse radiale de l'étoile 51Pegasi mettant en évidence la première exoplanète découverte en 1995 par l'équipe de Michel Mayor et Didier Queloz (Prix Nobel 2019).

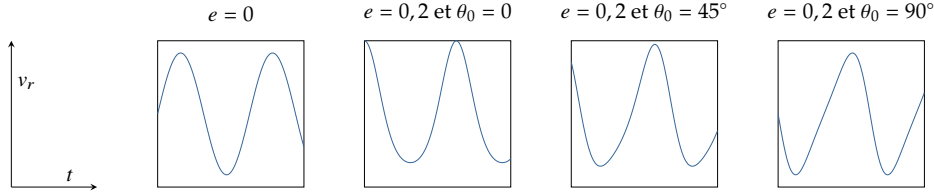


FIGURE 9.5 – Différents types de courbe de vitesse en fonction de l'excentricité et la direction d'observation.

calculs m_2 par $m_2 \sin i$ de sorte que l'on ne peut déterminer que le produit $m_2 \sin i$. Ceci dit, cela permet d'avoir une borne inférieure de la masse de la planète puisque $m_2 \geq m_2 \sin i$.

Enfin, il se peut également que plusieurs planètes gravitent autour de l'étoile. Dans ce cas, la mise en évidence n'est pas toujours aisée et fait appel à des techniques plus ou moins sophistiquées.

Vibrations moléculaires diatomiques

Considérons une molécule diatomique A–B isolée, où A et B représentent deux atomes considérés ponctuels de masse m_A et m_B . Notons \vec{r} le vecteur \overrightarrow{AB} . Bien que la description des édifices moléculaires relève de la mécanique quantique, adoptons le point de vue du chapitre 5 en traitant l'interaction inter-atomique de façon phénoménologique *via* le potentiel de Morse

$$\mathcal{E}_p = E_0 (e^{-2ax} - 2e^{-ax})$$

où E_0 désigne l'énergie de dissociation de la molécule et $x = r - r_{eq}$ l'écart à l'équilibre. Le profil de ce potentiel présente un minimum en $x = 0$ comme illustré sur la figure ci-contre.

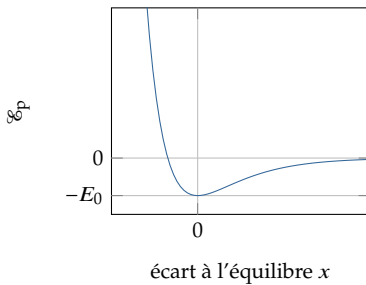


FIGURE 9.6 – Potentiels de Morse.

On sait que le mouvement relatif de B par rapport à A se réduit au mouvement du mobile réduit M de masse $\mu = m_A m_B / (m_A + m_B)$ soumis à la force central $\vec{f} = -\partial \mathcal{E}_p / \partial x \vec{u}_r$:

$$\mu \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{f}$$

On distingue deux cas de figures.

La molécule ne tourne pas

Dans ce cas, la molécule ne présente pas de moment cinétique barycentrique et l'on peut projeter l'équation du mouvement suivant l'axe fixe de la molécule. On obtient

$$\mu \ddot{r} = \mu \ddot{x} = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x}$$

Par ailleurs, si l'on s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre, on peut faire l'approximation

$$\mathcal{E}_p \simeq -E_0 + \frac{1}{2}\kappa x^2 \quad \text{avec} \quad \kappa = 2E_0 a^2$$

ce qui donne une équation du mouvement correspondant à un oscillateur de masse μ et de constante de raideur κ :

$$\mu \ddot{x} + \kappa x = 0$$

On peut donc assimiler la liaison moléculaire à un oscillateur de fréquence propre

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$$

Cette fréquence se situe dans le domaine infrarouge ($\nu_0 \sim 10^{13} - 10^{14}$ Hz) et son étude relève de la spectroscopie infrarouge. On note l'existence d'effet isotopiques. En effet, lorsque que l'on substitue un atome par un autre isotope, la constante de force κ , dépendant des propriétés électroniques, ne change pas, alors que la masse réduite varie.

La molécule est en rotation

Dans ce cas, la molécule présente un moment cinétique barycentrique non nul et constant. On sait alors que le mobile réduit associé au mouvement relatif décrit un mouvement plan caractérisée par une constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$ et un moment cinétique $L^* = \mu C$. La force centrale étant conservative, on a conservation de l'énergie mécanique dans le référentiel barycentrique :

$$\frac{1}{2}\mu v_M^2 + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m^*$$

En coordonnées polaires, la vitesse du mobile réduit vaut $\vec{v}_M = \dot{r}\vec{u}_r + L^*/(\mu r)\vec{u}_\theta$ ce qui donne

$$\frac{1}{2}\mu \dot{x}^2 + \frac{L^{*2}}{2\mu(x+r_{eq})^2} + \mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_m^*$$

Ainsi, on peut ramener le problème à l'étude d'un point matériel à un degré de liberté (x) plongé dans un champ de force d'énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p, \text{eff}} = \frac{L^{*2}}{2\mu(x+r_{eq})^2} + \mathcal{E}_p(x)$$

Enfin, si l'on se restreint aux petits mouvements autour de la position d'équilibre, on peut d'une part approcher $\mathcal{E}_p(x)$ par un potentiel harmonique, d'autre part assimiler $x + r_{eq}$ à r_{eq} :

$$\mathcal{E}_{p, \text{eff}} \simeq \frac{L^{*2}}{2\mu r_{eq}^2} + \frac{1}{2}\kappa x^2 - E_0$$

On distingue trois termes :

- l'énergie de liaison $-E_0$;
- le terme élastique harmonique $\frac{1}{2}\kappa x^2$ associé aux vibrations moléculaires ;
- le terme d'énergie centrifuge $L^{*2}/(2\mu r_{\text{eq}}^2)$ associé à la rotation rigide⁶⁶ de la molécule.

66: On parle de l'approximation du rotateur rigide.

Remarque : Dans le cadre de la mécanique quantique, on peut montrer que le terme élastique donnera lieu à une quantification ($\mathcal{E}_{\text{vib}} = (n + 1/2)h\nu$) ainsi que le moment cinétique $L^{*2} = \ell(\ell + 1)\hbar^2$ de sorte que la molécule présente des niveaux d'énergie quantifiés :

$$\mathcal{E}_{n,\ell} = (n + 1/2)h\nu_0 + \ell(\ell + 1)\frac{\hbar^2}{2\mu r_{\text{eq}}^2} - E_0 \quad \text{avec } (n, \ell) \in \mathbb{N}^2$$

C'est ce modèle qui permet d'interpréter les spectres issus de la spectroscopie infrarouge.