D11 – Rétroaction et Oscillations

19 février 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

Correcteur
C. Dupuy

Niveau : L2

Prérequis

- ➢ Transformée de Laplace
- ➢ Diagramme de Bodes et Nyquist
- ➢ Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT)

Expériences

- Oscillateur à pont de Wien

Table des matières

Problématique

Comment réussir une synthèse tout en répondant à des contraintes de coût, de sécurité ou environnementales ?

1 Boucle de Rétroaction

1.1 Systèmes asservis

Le concept de rétroaction provient de l'ingénierie. Il répond au besoin de contrôler précisément les machines humaines (moteur, amplificateur, etc). Le principe général est de piloté une machine non pas directement avec une entrée consigne E, mais avec un comparateur qui renvoie la différence ϵ entre l'entrée consigne et la sortie S.

Ce type de système est appelé un système bouclé. Comme la boucle revient sur un comparateur, la boucle est dite de "rétroaction négative". Si on boucle sur un additionneur au lieu d'un comparateur, on parle de "rétroaction positive".

On peut comparer la réponse d'un système bouclé et d'un système ouvert à une perturbation :

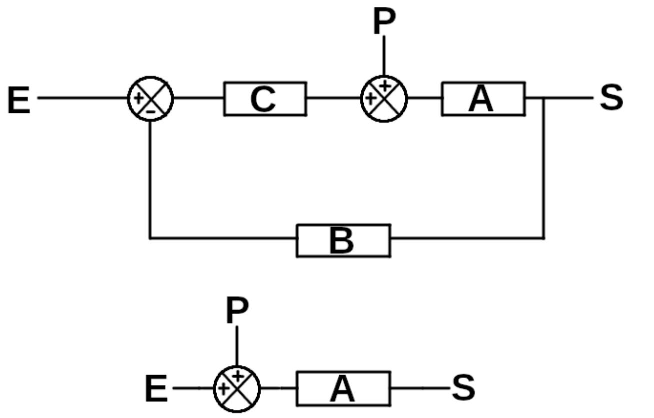


Figure 1 – Comparatif entre un actionneur A subissant une perturbation P et piloté par une boucle de rétroaction (en haut) et piloté directement par une entrée-consigne E (en bas).

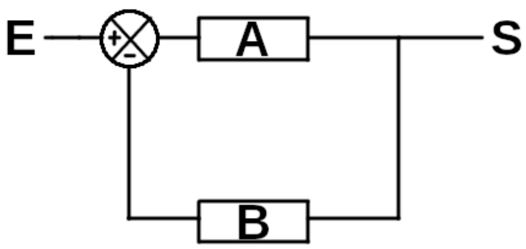
$$S_{ouvert} = A \cdot E + A \cdot P$$

$$S_{\text{bouclé}} = \frac{AC \cdot E}{1 + ABC} + \frac{A \cdot P}{1 + ABC}$$

L'influence de la perturbation sur la sortie (comparativement à la consigne) est d'autant plus faible que la correction C est forte.

Ce concept de rétroaction est également très utile en physique. Il nous donne en effet un nouvel outil pour comprendre certain phénomène, comme la rotation synchrone des satellites autours des planètes, ou encore le contrôle des mouvements du corps par le système nerveux.

1.2 Système du premier ordre bouclé



Soit un système du premier décrit par sa fonction de transfert $A(p)$. On regarde l'influence sur le système d'une boucle de rétroaction négative caractérisée par un gain B (voir ci-dessus). La nouvelle fonction de transfert du système bouclé devient alors $H(p)$:

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + BA(p)} \qquad A(p) = \frac{K}{1 + \frac{p}{\omega_0}}$$

La nouvelle fonction de transfert H reste la fonction d'un système du premier ordre de gain K' et de pulsation de coupure ω_0' :

$$K' = \frac{K}{1 + BK} \qquad \omega_0' = \omega_0(1 + KB)$$

Le gain du système diminue tandis que sa bande passante (limité par la fréquence de coupure) augmente. On remarque par ailleurs que le multiple gain x fréquence de coupure reste constant.

Ce type de boucle est particulièrement intéressante pour les amplificateur opérationnel. En effet, ceux-ci ont nativement un gain de l'ordre de 10^5 mais une fréquence de coupure seulement une dizaine de Hertz. En bouclant un AO avec un pont diviseur de tension, on peut grandement diminuer le gain et ainsi obtenir une fréquence de coupure très élevé (100KHz pour un gain de 10).

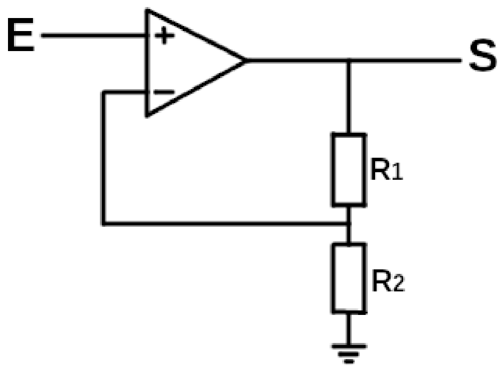


Figure 2 – AO bouclé avec un pont diviseur de tension.

Avec de montage, le gain et la fréquence du coupure du système deviennent :

$$K' = \frac{K_{AO}}{1 + \frac{R_2 K_{AO}}{R_1 + R_2}} \simeq 1 + \frac{R_1}{R_2} \qquad \omega_0' = \omega_{AO}\left(1 + \frac{R_2 K_{AO}}{R_1 + R_2}\right) \simeq \omega_{AO}\frac{R_2 K_{AO}}{R_1 + R_2}$$

1.3 Système du second ordre bouclé

On réalise la même étude, mais avec cette fois $A(p)$ un système du second ordre.

$$A(p) = \frac{K}{1 + 2\xi\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \qquad H(p) = \frac{A(p)}{1 + BA(p)} = \frac{K'}{1 + 2\xi'\frac{p}{\omega_0'} + \frac{p^2}{\omega_0'^2}}$$

Un système du second ordre bouclé reste un système du second ordre dont le gain, l'amortissement et la fréquence de coupure deviennent :

$$K' = \frac{K}{1 + BK} \qquad \omega_0' = \omega_0\sqrt{1 + BK} \qquad \xi' = \frac{\xi}{\sqrt{1 + BK}}$$

Comme pour le système du premier ordre, le gain diminue tandis que la pulsation de coupure augmente. L'amortissement diminue (le facteur de qualité augmente).

1.4 Critère de Nyquist

Une question que nous pouvons nous poser est celle de la stabilité des systèmes bouclés. En effet, puisqu'on renvoie la sortie sur l'entrée du système, on peut très bien imaginer que le système s'emballe, avec divergence des valeurs de sorties. Il nous faut donc un critère de stabilité.

Nous rappelons ici qu'un système est stable si sa fonction de transfert ne possède que des pôles à partie réelle négative. Comme la fonction de transfert d'un système bouclé est de la forme $H_{BF} = \frac{A}{1+AB}$, cela signifie qu'il faut que la fonction $1 + AB$ n'ait aucune racine à partie réelle positive.

D'après le théorème de Cauchy, si le contour dessiner par l'image de l'axe imaginaire pur à travers la fonction $1 + AB$ entoure pas le point origine un nombre N de fois, alors $N = Z - P$ avec Z le nombre de zéros à partie réelle positive et P le nombre de pôles à partie réelle positive de $1 + AB$.

En supposant que le système en boucle ouverte ($H_{BO} = AB$) est stable, c'est à dire que AB n'admet aucun pôle à partie réelle positive, alors le nombre N doit être nul pour que le système en boucle fermé soit stable.

Un système est donc stable si l'image de l'axe imaginaire à travers $1+AB$ n'entoure pas le point origine, ou encore si l'image de l'axe imaginaire à travers la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO} = AB$ n'entoure pas le point $-1 + 0j$.

Ainsi, pour connaitre la stabilité d'un système en boucle fermé, il suffit de tracer son diagramme de Nyquist en boucle ouverte. Si la courbe obtenu ne dépasse pas le point $-1 + 0j$, alors le système est stable. C'est le diagramme de Nyquist.

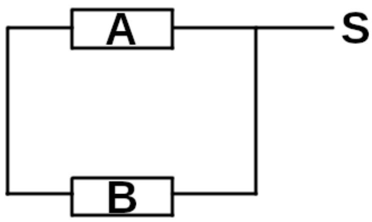
On peut ainsi montrer que les systèmes du premier ordre bouclés sont toujours stables. Les systèmes du second ordre sont également toujours stable, mais ils peuvent s'approcher aussi près que voulu du point $-1+0j$, si bien qu'ils peuvent devenir instables suite à une perturbation.

2 Oscillateurs

Nous venons de voir les systèmes bouclés stables et instables. Nous allons à présent nous intéresser aux cas intermédiaires.

Un système stable est un système dans lequel tout signal finira amortie au bout d'un temps suffisamment long. Un système instable est un système pour lequel certaines fréquences sont amplifiées, le signal divergent au cours du temps. Nous pouvons nous poser la question de savoir s'il existe des systèmes tels qu'un signal se maintienne sur un temps infini, sans s'amortir ni s'amplifier (ce qu'on appelle des oscillations auto-entretenues).

2.1 Critère de Barkhausen



Prenons le système ci-dessus. Un tel système pourra présenter des oscillations auto-entretenues si et seulement si il existe une pulsation ω telle que $S = A(j\omega)B(j\omega)S$.

Autrement dit, s'il existe une pulsation ω telle que $A(j\omega)B(j\omega) = 1 + 0j$. Cela signifie que la boucle ouverte doit avoir un gain de 1 (donc ni amplification ni atténuation), et qu'elle ne doit pas introduire de différence de phase (sinon nous aurions des interférences destructives).

2.2 Exemple : oscillateur de Wien

Un oscillateur de Wien est composé d'un pont de Wien A et d'un amplificateur B. Leurs fonctions de transferts sont respectivement :

$$A(p) = \frac{RCp}{1 + 3RCp + R^2C^2p^2} \qquad\qquad B = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

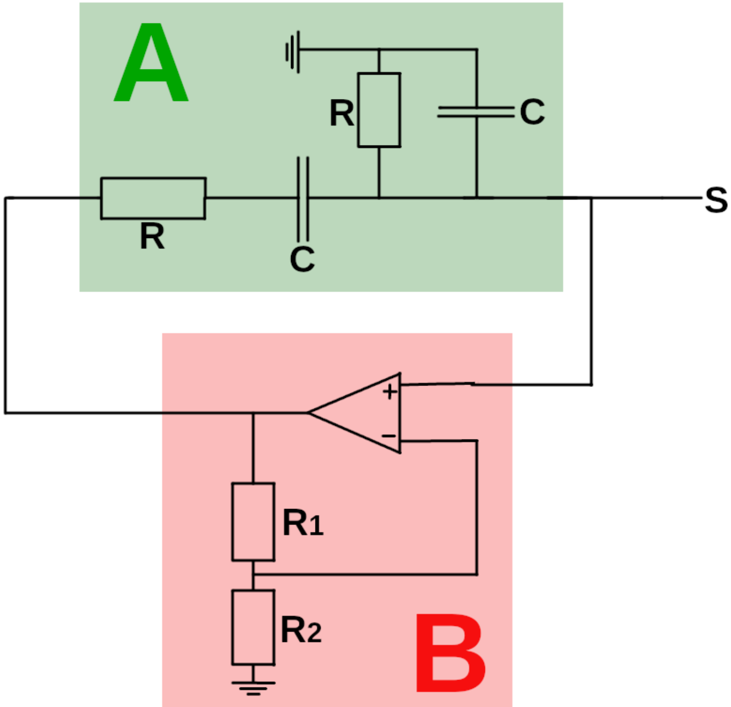


Figure 3 – Oscillateur de Wien

Le pont de Wien est un filtre passe bande. On peut tracer son diagramme de Bodes et/ou de Nyquist en préparation. On peut vérifier son coefficient de qualité en leçon pour avoir une mesure quantitative (on s'attend à trouver 1/3).

La phase de $A(j\omega)B$ s'annule en $omega = 1/RC$. A cette pulsation, le gain du système en boucle ouverte est de $B/3$. On s'attend donc à dépasser le point de Barkhausen lorsque $B = 3$, c'est à dire lorsque $R_1 = 2R_2$. Et en effet, lorsqu'on franchit cette limite d'un ohm, à l'aide d'une boite à décade, le système présente des oscillations de pulsation $omega = 1/RC$. En rebaissant la résistance d'un ohm, on observe les oscillations s'amortir lentement.

On peut remarquer que, en réalité, on est jamais pile sur le critère de Barkhausen (celui-ci étant un point discret). Dans les faits, certaines pulsations autours de ω_0 sont amplifiées jusqu'à ce que l'amplificateur opérationnel arrive à saturation. Lorsque on s'approche de la saturation, le gain de la boucle diminue pour tendre vers 1.

En dépassant fortement le critère de Barkhausen, le signal de sortie cesse d'être sinusoïdale. En effet, on amplifie une gamme de fréquence de plus en plus large.

Ouverture

On termine la leçon par une ouverture sur les oscillateurs dans le cas des oscillateurs à relaxation, par exemple le vase de Tantale.

3 Questions

• Connais-tu des applications de la rétroaction dans le domaine de la musique ?
→ Le contrôle des enceintes, la transformation de signaux faibles (instruments électriques) en un signal de forte amplitude.

• Quel est l'effet de la distorsion sur le son ?
→ Coupure des hautes fréquences

• Définition de la transformée de Laplace ?
→ $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \mathrm{d}t$

• En quoi les systèmes que tu as décrits sont linéaires ?
→ Ces systèmes sont des SLIT (système linéaire indépendant du temps). Dans l'approximation de puissance relativement faible et de basse fréquence, ils peuvent être décrit par des équations linéaires indépendante du temps.

• Quelles sont les grandes familles d'erreur pour un AO ?

• C'est quoi une thermo-résistance ?
→ Une thermo-résistance est une résistance qui varie fortement en fonction de sa température.

• Qu'est ce que c'est physiquement un correcteur ?
→ Le terme "Correcteur" est plus un terme d'ingénierie qu'un terme physique. Le rôle du correcteur dans une boucle est de convertir la différence entre l'entrée et la sortie ϵ en une nouvelle consigne pour l'actionneur. Physiquement, le correcteur peut prendre bien des formes. Par exemple, les effets de marrée conduise à une déformation de la Lune. Cette déformation dépend de la différence entre la vitesse de rotation et la vitesse de révolution sélénienne. La lune ainsi déformée subit un couple dans le champ de gravité de la Terre, ce qui se traduit par une modification de sa vitesse de rotation. Dans ce système, le correcteur est l'effet de marrée, qui transforme la différence rotation/révolution en une déformation du corps. L'actionneur est le couple qu'un solide non symétrique subit dans un potentiel gravitationnel.

• En quoi tu nous décris l'asservissement dans ta première partie ?
→ Les boucles de rétroactions sont des outils d'analyse historiquement reliés à l'ingénieur. Par ailleurs les élèves de prépa voit ces concepts en science de l'ingénieur. Il m'a donc semblé pertinent de partir de la vision "ingénieur" (asservissement de système) pour ensuite revenir vers une vision plus physique du concept.

• Peux-tu donner un exemple d'asservissement pour un non physicien ?
→ On peut parler du contrôle automatique de la vitesse des voitures modernes, du contrôle de la température d'un four, etc...

• Qu'est-ce qui fait un bon asservissement ?
→ Tout dépend du système asservit. On peut définir différents critères, comme le temps de réponse du système, la présence ou non d'un dépassement de la consigne, la résilience du système face à diverses perturbations...

• Quel est le compromis entre dépassement, vitesse et précision ?
→ Un système ayant un temps de réponse court est aussi un système qui sera plus sensible aux perturbations, et donc moins précis. Pour certain système, un temps de réponse rapide peut également impliquer un dépassement de la consigne.

• Quelle est l'influence de la rétroaction sur la perturbation ? Est-ce que bouclé c'est mieux ?
→ De manière générale, une rétroaction diminue l'effet d'une perturbation devant l'effet de la consigne.

• A quoi correspondent tes courbes sur le diagramme de Nyquist ? Celle 1+AB est-elle fermée ? Dans quelle sens est-elle parcourue ?
→ Le diagramme de Nyquist du système en boucle ouverte correspond à l'image de l'axe imaginaire positif par la fonction de transfert en boucle ouverte AB. Ces courbes ne sont pas obligatoirement fermée (exemple : système du premier ordre). Toutefois, il est possible de reconstruire facilement l'image de l'axe imaginaire total en remarquant que $H(-j\omega)$ est le conjugué de $H(j\omega)$. L'image de l'axe imaginaire total forme bien une boucle fermée.

- Qu'est-ce qu'un système stable/instable ?

→ Un système instable est un système dont au moins une grandeur diverge vers l'infini alors qu'on le soumet à un signal d'entrée fini.

- Comment ça marche un laser ?

- D'où vient l'énergie qui permet les oscillations ?

→ Dans un système comme l'oscillateur de Wien, l'énergie provient de l'amplificateur, dont le gain est supérieur à 1.

- Quelles mesures as-tu faîtes sur ta manip ? En boucle ouverte ou fermée ?

→ Le diagramme de Nyquist est tracé en boucle ouverte, afin de pouvoir appliquer le critère de Barkhausen.

- Pourquoi en manip tu parles du point (1,0) pour Barkhausen alors que tu parlais de (-1,0) auparavant ?

→ Il s'agit en réalité du même point, mais dans des conventions différentes. Lorsqu'on parle du critère de Nyquist, on suppose une boucle de rétroaction négative, alors que lorsqu'on parle du critère de Barkhausen on suppose une boucle de rétroaction positive. Un signe $-$ apparait donc entre les deux critères.

- Comment mesurer le facteur de qualité Q sur ta manip ?

→ En mesurant la fréquence de coupure f_0 en boucle ouverte (en recherchant par exemple la fréquence qui annule la phase entre l'entrée et la sortie), puis en mesurant Δf la largeur de la bande passante (définie comme étant la différence $f_+ - f_-$ avec f_+ et f_- les fréquences telles que le gain soit de 3dB inférieur au gain en f_0). Le facteur de qualité Q est égal à $f_0/\Delta f$.

- Quelles sont les incertitudes ?

→ $\mathrm{Var}(Q) = \left(\frac{Q}{f_0}\right)^2 \mathrm{Var}(f_0) + \left(\frac{Q}{\Delta f}\right)^2 \left(\mathrm{Var}\left(f_+\right) + \mathrm{Var}(f_-)\right) \simeq \left(\frac{Q}{\Delta f}\right)^2 \mathrm{Var}(f_+)$