D12 – Traitement d'un signal. Étude spectrale

21 juin 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

- Circuit RC
- Effet Doppler

Expériences

- Mesure effet Doppler (divers p.35)
- diagramme de Bode d'un filtre
- expérience d'Abbe (tp optique p42)

Table des matières

Définition signal x(t)
passer de x continu à discret -> quantification du signal
passer de t continu à t discret -> on échantillonne le signal
système déterministe/aléatoire
système indépendant du temps (la sortie ne dépend pas du moment où le système reçoit l'entrée)
décomposition spectrale (série de Fourier)
TF d'un signal non périodique (et limité dans le temps) -> TF continue
TF d'un signal périodique (illimité ds le temps) -> TF discrète.
Analogique : filtres, diagrammes de Bode, fonction de transfert etc...
Transmission, modulation d'un signal AM, FM, démodulation ... (pas chaud pour en parler)
Numérique : quantification et échantillonnage, critère de Shannon
TF discrète

Introduction

Bien souvent, en physique, nous observons des signaux $x(t)$ périodique ou pseudo-périodique. La lumière d'une étoile, le son d'un instrument, une onde sismique, onde radio... tous ces phénomènes se présentent à nous sous forme d'une grandeur (champ électromagnétique, pression, position) variant rapidement et quasi-périodiquement au cours du temps (c'est à dire que la période du signal est faible devant le temps caractéristique de la variation du signal).

Par conséquent, des méthodes mathématiques et techniques ont été développées pour analyser ces signaux. Ce sont ces méthodes que nous allons étudier aujourd'hui.

1 Signaux et Spectres

1.1 Décomposition spectrale

1.1.1 Série de Fourier

Commençons par nous intéresser à un signal $x(t)$ T-périodique. On peut alors écrire ce signal comme une sommes de sinus et de cosinus : il s'agit de la décomposition en série de Fourier du signal :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \tag{1}$$

Le terme de plus basse fréquence correspond au fondamental. Les suivants sont les harmoniques.

Pour un signal triangle :

$$\mathrm{tr}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cos\left(2\pi(2n+1)\frac{t}{T}\right) \tag{2}$$

Illustration code python : construction d'un signal triangle en ajoutant une à une ses composantes

1.1.2 Transformée de Fourier

On peut généraliser les séries de Fourier à n'importe quel signal de carré sommable. Comme tout signal réel est borné dans le temps, tout signal réel possède bien une transformée de Fourier. On note $X(\omega)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-i\omega t) \mathrm{d}t \tag{3}$$

Remarque : on peut repasser de $X(\omega)$ à $x(t)$ par la transformée de Fourier inverse, qui ressemble beaucoup à la TF :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(+i\omega t) \mathrm{d}\omega \tag{4}$$

Remarque : pour des signaux réels (borné dans le temps), la transformée de Fourier est continue. Pour des signaux parfaitement périodique (et donc non borné dans le temps), la transformée de Fourier prend la forme d'une somme de Dirac.

1.2 Analyse spectrale

L'amplitude de la transformée de Fourier d'un signal est appelé le spectre du signal. Il est souvent plus intéressant d'analyser le spectre d'un signal que le signal lui même. Ainsi, l'analyse du spectre de la lumière permet ainsi d'analyser la matière grâce aux raies d'absorption et d'émission.

Prenons comme exemple la réflexion d'une onde radio sur le plasma généré par un météore.
Écoute d'une réflexion sur un météore : on entend sifflement aigu qui devient plus grave avec le temps. Analyse qualitative du spectre du signal
On peut aussi montrer rapidement le spectre d'une lampe spectrale à travers un réseau...

2 Traitement analogique

Souvent, un signal mesuré n'est peu voir pas exploitable directement. Différents signaux parasites et bruits peuvent se superposer au signal d'intérêt.
L'intérêt de l'analyse spectrale est de pouvoir séparer ces différents signaux en fonction de leurs fréquences. Ainsi, si un signal basse fréquence est caché dans un bruit blanc de haute fréquence, l'analyse spectrale permettra de le détecter.
Par ailleurs, on peut améliorer la qualité du signal en filtrant les fréquences parasites, pour ne garder que les fréquences du signal d'intérêt.

2.1 Filtrage

Pour filtrer un signal d'entrée $e(t)$, on le fait passer à travers un système (électronique, optique ou physique) qui le transforme en un nouveau signal de sortie $s(t)$.

2.1.1 Fonction de Transfert

Dans cette leçon, nous nous limiterons au SLIT : les systèmes linéaire indépendant du temps. Un système est dit linéaire si le signal d'entrée et de sortie sont reliés une équation différentiel linéaire. Le système est indépendant du temps si les coefficient de cette équation sont constants.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n}(t) - b_n \frac{\mathrm{d}^n e}{\mathrm{d}t^n}(t) = 0 \tag{5}$$

Cette équation se simplifie grandement dans l'espace de Fourier. En effet, la transformée de Fourier est linéaire. De plus, la TF de la dérivée $x'(t)$ est égale à $i\omega X(\omega)$. L'équation ci-dessus devient donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (i\omega)^n S(\omega) - b_n (i\omega)^n E(\omega) = 0 \tag{6}$$

Soit encore :

$$S(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (i\omega)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (i\omega)^n} E(\omega) = H(\omega)E(\omega) \tag{7}$$

La fonction $H(\omega)$ est appelé la fonction de transfert du SLIT.
L'étude de cette fonction de transfert nous renseigne directement sur les effets du système sur un signal.

2.1.2 Propriété des filtres

L'étude de cette fonction de transfert nous renseigne directement sur les effets du système sur un signal. Ainsi (dans le cas d'un SLIT), si on envoie un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude A sur un filtre de fonction de transfert $H(\omega)$, le signal de sortie $s(t)$ sera également une fonction sinusoïdale de pulsation ω. Seul sont amplitude et sa phase auront changé.

$$e(t) = A\sin(\omega t) \qquad \rightarrow \qquad s(t) = |H(\omega)|A\sin\Big(\omega t + \arg(H(\omega))\Big) \tag{8}$$

$|H(\omega)|$ est le gain de la fonction de transfert, tandis que $\arg(H(\omega))$ est sa phase

2.2 Application

2.2.1 mesure d'un décalage Doppler

On suit le protocole du tp divers p35, en mettant l'accent sur le filtre qui nous permet d'extraire le signal basse fréquence qui nous intéresse. On remplace le flitre d'ordre 4 ultra bourrin du protocole par un simple RC dont on fait le diagramme de Bode.

2.2.2 Expérience d'Abbe

On peut parler rapidement d'optique de Fourier et de l'expérience d'Abbe (tp optique p42)

3 Signaux numérique : Échantillonnage et Quantification

3.1 Quantification

Dans le monde moderne et dystopique du tout informatique, nous utilisons la grande majorité du temps des signaux numérique.

De cela découle une double quantification des données : un ordinateur ne peut gérer qu'un nombre fini de nombres, lié au nombre de bits qu'utilise l'ordinateur pour les écrire.

Ainsi, Latis fait ses calculs en 12 bits, il a accès à 4096 nombres différents. Si on utilise une gamme trop large pour le signal observé, celui-ci sera crénelé.

On peut peut être montrer ça rapidement sur Latispro...

Bien sur, en général les ordinateurs d'aujourd'hui utilisent plus de bits, typiquement 32 voir 64. Mais cela n'a pas toujours été le cas, et ça peut avoir des conséquences désastreuses !

On penser au bug de l'an 2000 : pour beaucoup d'ordinateur, l'année n'était calculée qu'avec une centaine de nombres disponibles. Les ordinateurs affichaient en réalité "1","9" puis l'année en cours, par exemple "96".

Moins rigolo, il y a l'accident du Vol 501 d'Ariane 5 en 1996, qui a vu la fusée s'écraser suite à un bug. La gamme utilisée pour les données volumétriques d'Ariane 5 a été dupliquée depuis les codes pilotant ariane 4. Seulement cette gamme n'était pas adaptée, causant la perte de la fusée et de sa charge utile.

3.2 Échantillonnage

Si les problème lié à la quantification tendent à diminuer avec l'augmentation des capacité des ordinateurs, ce n'est pas le cas pour l'échantillonnage.

Un signal numérique est un signal discret : quand on numérise un signal analogique, on ne prend les mesures qu'à des temps discret t_n. On le voit également sur Latispro.

Quelles sont les conséquences de cet échantillonnage sur l'analyse spectrale ?

3.3 Transformée de Fourier discrète

Que se passe-t-il si on fait la TF d'un signal discret ? On obtient une fonction périodique ! Et de même, si on fait la TF d'un signal périodique, on obtient un spectre discret !

Et sa tombe bien, puisque si un spectre est numérique, alors il est discret.

Le principe de la TF numérique d'un signal discret de N mesures est le suivant : on considère que ce signal se répète un nombre infini de fois : on obtient ainsi un signal discret et périodique de période Nt_n.

La transformée de Fourier d'un tel signal est elle même discrète et périodique. On obtient ainsi un spectre discret de pas $1/t_n$ et contenant N nombres complexes.

Quelle est cette TF exactement ? La fonction que nous analysons est égale au produit d'un signal continu $f(t)$ de période Nt_n par un peigne de dirac de pas t_n.

Or, une des propriété des TF, c'est que la TF d'un produit de fonction est le produit de convolution de leurs TFs respectives, et vice versa.

La TF obtenue sera donc le produit de convolution de la TF de $f(t)$, que nous noterons $F(\nu)$ et qui est notre fonction d'intérêt, par la TF d'un peigne de dirac.

Ainsi, on aura :

$$TF(\nu) = \int F(\nu')III_{1/t_n}(\nu - \nu')d\nu \tag{9}$$

$$TF(\nu) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} F(\nu - i/t_n) \tag{10}$$

Comme par ailleurs la TF $F(\nu - i/t_n)$ est paire (si $f(t)$ est réel), il y a un effet de recouvrement si le signal a des composantes de fréquences supérieur à $1/2t_n = \nu_{max}/2$.

Le critère $\nu < \nu_{max}/2$ est appelé le critère de Shannon.

Faire une jolie figure de tout ça.

Remarque : Au final, l'information utile de la TF discrète est portée par $N/2$ nombres complexes. Elle possède donc la même quantité d'information que le signal initial de N nombre réel.

Conclusion

Nous ne faisons ici qu'effleurer un domaine bien plus vaste : la théorie de l'information. Celle-ci est aujourd'hui extrêmement utile pour compresser et transmettre efficacement de l'information. Pas de théorie de l'information, pas d'internet !