D13 – Ondes progressives, ondes stationnaires

15 juin 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

- PFD
- Loi des mailles, loi des nœuds

Expériences

- Corde de Melde
- vitesse onde EM dans un câble coaxial

Table des matières

Introduction

Nous avons tous connaissance d'un certain nombre de phénomènes ondulatoire : vaguelettes à la surface de l'eau, vibration d'une corde de guitare, son, lumière, etc...

Mais qu'est ce qui relie ses phénomènes pourtant très différents ?

1 Équation d'onde

1.1 La corde de Melde

Commençons par par nous intéresser de plus près à la corde vibrante. Pour cela, nous allons considérer une corde horizontale soumise à une tension T_0.

Exp : On montre une corde tendue, on la fait vibrer : il y a bien des ondes la dedans (Tp divers p19). Envoyer (à la main) un pusle dans une corde longue (si on en trouve une correcte pour faire ça).

La corde est parcourue par des ondes : on peut décrire un point de la corde par sa hauteur $\phi(x)$ au dessus on en dessous de la ligne horizontale, et α l'angle que fait la corde avec l'horizontale. On suppose de toute petite vibration, si bien qu'on peut supposer que le mouvement de la corde est transverse. On applique le PFD à un morceau de corde entre x et $x + \mathrm{d}x$.

Selon $\overrightarrow{u}_x$:

$$F(x) + F(x + \mathrm{d}x) = T(x + \mathrm{d}x) - T(x) \simeq 0 \tag{1}$$

Selon $\overrightarrow{u}_y$:

$$F(x) + F(x + \mathrm{d}x) = T(x + \mathrm{d}x)\sin(\alpha(x + \mathrm{d}x) - T(x)\sin(\alpha(x)) \tag{2}$$

$$\mu \mathrm{d}x \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \tag{3}$$

$$\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{4}$$

Finalement, on obtient l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

1.2 Le câble coaxiale

Mettons cette équation de côté pour le moment et regardons un autre cas simple : le câble coaxiale.

Exp : Ce câble aussi est soumis à des ondes. On envoie un pulse dans un câble de 100 mètres. Celui-ci nous revient après réflexion : il y a donc bien propagation d'une onde dans le câble. (Tp electronique p68)

Le câble est constitué de deux conducteur la gaine et l'âme. Il existe une capacité linéique Γ ; ainsi qu'une inductance linéique Λ. On néglige la résistivité du câble.

L'équation sur le courant :

$$i(x + \mathrm{d}x) = i(x) - \Gamma \mathrm{d}x \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \tag{6}$$

L'équation sur la tension :

$$u(x + \mathrm{d}x) = u(x) - \Lambda \mathrm{d}x \frac{\partial i}{\partial t} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \tag{7}$$

En combinant les deux, on obtient l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

1.3 Équation de d'Alembert

On remarque que, pour le câble comme pour la corde, on a trouvé une équation similaire.

Cette équation, c'est l'équation de d'Alembert, qui s'écrit dans le cas général :

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

L'équation d'Alembert couple les coordonnées spatiales et temporelles. Par ailleurs elle ne dépend que d'un paramètre c.

On pourrait refaire le même genre d'étude pour les ondes EM : on trouverait une équation d'Alembert avec $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Où pour une onde acoustique, $c = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$.

2 Ondes progressives

2.1 Forme générale

Cherchons une solution à l'équation d'Alembert. Lorsque nous observons une onde qui se propage, le haut d'une crête se déplace à une certaine vitesse v. On a donc $f(t_0, x) = f(t_0 + t, x + vt)$. On peut donc ré-écrire f comme une fonction d'une seule variable : $f(t, x) = f(0, x - vt)$.

Rentrons cette forme de solution dans l'équation de d'Alembert. On trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \tag{10}$$

Cette équation n'est valide que si $v = c$. c est donc la vitesse de propagation de l'onde.

2.2 Onde plane

Une solution particulière de l'équation de d'Alembert est la solution harmonique : on suppose que $f(x - ct) = f_0 \sin(k(x - ct)) = f_0 \sin(kx - \omega t))$. k est appelé le vecteur d'onde, tandis de ω est la pulsation. Ils sont relié à la longueur d'onde $k = 2\pi/\lambda$et à la fréquence $f = \omega/2\pi$.

Pour l'instant, nous considérons une onde unidimensionnelle, mais on peut directement monter 3 dimensions en considérant une onde se propageant selon la direction $\vec{u}_x$ en tout point de l'espace : il s'agit alors d'une onde plane.

2.3 Onde sphérique

Bien sur, une onde se déplaçant dans l'espace 3D n'est pas forcément plane. Souvent, on rencontre la situation d'une source émettant dans toute les directions : on parle alors d'onde sphérique. Pour décrire ces ondes, on passe en coordonnées sphériques. On a alors $f(t, r)$ et :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 rf}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

La solution de cette équation est de la forme $f(r, t) = \frac{1}{r} g(r - ct)$. L'onde n'est plus exactement périodique à cause du terme en $1/r$ (mais on conserve l'énergie !)

3 Ondes stationnaires

3.1 Forme générale

On vient de voir le cas d'onde se propageant, mais ce n'est pas toujours le cas : c'est le cas d'une corde d'un instrument de musique, par exemple. On appelle ces ondes les onde stationnaires. Pour ces ondes, on peut découpler les cordonnées spatiales et temporelles. On peut donc écrire $s(t, x) = f(x)g(t)$. L'équation de d'Alembert devient :

$$g(t)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) - f(x)\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) - \frac{1}{g(t))}\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \tag{13}$$

Comme les deux termes de gauche et de droite ne dépendent pas des même paramètres, ils doivent être constants !

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = Af(x) \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} = Ac^2 g(t) \tag{14}$$

Si A est positif, on obtient une solution qui diverge, non physique. Si A est négatif, on obtient des solutions périodiques : $s(x, t) = s_0 \cos(kx + \phi)\cos(\omega t + \psi)$ où k est le vecteur d'onde et ω la pulsation. On trouve la même relation entre les deux que pour l'onde plane : $\omega^2 = k^2 c^2$.

<u>exp</u> : quantitatif, on mesure la vitesse dans la corde et on vérifie que c'est en accord avec sa masse linéique et la tension (tp divers p19). Ne pas oublier de faire un topo sur les conditions aux limites pour expliquer les résonances !

3.2 Lien avec les ondes progressives

Si deux ondes planes progressives de même amplitude et même fréquence mais de direction opposée se superposent, elle forme un nouveau type d'onde : les ondes stationnaires (on montre l'animation l'animation)

En effet, une onde plane peut s'écrire :

$$s(x,t) = s_0 \cos(kx+\phi)\cos(\omega t+\psi) = 0.5 s_0[\cos(kx+\phi+\omega t+\psi)+\cos(kx+\phi-\omega t-\psi)] \tag{15}$$

De même, une onde progressive peut s'écrire comme la somme de deux ondes stationnaires déphasée de $\pi/2$:

$$s(x,t) = s_0\cos(kx-\omega t) = s_0\cos(kx)\cos(\omega t)+s_0\sin(kx)\sin(\omega t) \tag{16}$$

Conclusion

Nous avons vu aujourd'hui que tout les phénomène ondulatoire sont régis par le même type d'équation : l'équation de d'Alembert. Nous avons vu deux solutions particulière de cette équation : les ondes stationnaires et les ondes progressives.

Néanmoins, cette vision des ondes fait l'impasse sur tout phénomène dissipatif : les ondes peuvent se propager at vitam eternam, sans s'atténuer. Dans les faits, ce n'est pas toujours le cas : une partie de l'onde se dissipe lors du mouvement de la corde de Melde. Dans une prochaine leçon, nous verrons comment les effets dissipatifs peuvent modifier l'équation d'Alembert, et les conséquences sur la propagation des ondes.