D14 – Ondes acoustiques

20 juin 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

- Mécanique des fluides
- équation de d'Alembert
- Second principe de la thermodynamique

Expériences

- Trombone de Koenig

Table des matières

1 Ondes dans un fluide **2**
1.1 Modélisation . . . 2
1.2 Onde sonore dans un gaz parfait . . . 3
1.2.1 Trombone de Koenig . . . 3
1.3 Cas des solides . . . 3

2 Énergie et intensité **3**
2.1 Puissance d'une onde sonore . . . 3
2.2 Intensité d'une onde sonore . . . 4

3 Impédance **4**
3.1 Définition . . . 4
3.2 Transmission d'un son . . . 5

Introduction

L'ouïe est un des sens les plus importants pour l'homme. Ainsi, en France, le Code de l'action sociale et des familles considère qu'une personne totalement sourde a un taux d'incapacité de 80%.

Le son nous sert non seulement à percevoir notre environnement, mais également à communiquer. Les asymétrie du pavillon de l'oreille nous permettent de déterminer spatialement la provenance d'un son, tandis que notre espèce a développé un langage sonore universel. Les intonations de l'approbation, de la désapprobation, de l'interrogation, de la colère, du mépris, de la tristesse ou de la joie sont reconnaissable à travers toutes les cultures. L'importance de la musique dans les sociétés humaines n'est certainement pas étrangère à cela.

Dans la leçon d'aujourd'hui, nous allons nous intéresser à la ces ondes particulières que sont les ondes acoustiques.

1 Ondes dans un fluide

1.1 Modélisation

On se place dans le cadre d'un fluide parfait (sans viscosité). Cette hypothèse est vrai dans la limite d'onde non amortie, sans dissipation. Dans le cadre de cette approximation, l'écoulement est réversible. Au repos, le fluide est de densité ρ_0 et de pression P_0. On étudie ce qu'il se produit si on introduit une petite perturbation. Les caractéristiques du fluide sont alors données par :

$$\begin{aligned} P(\overrightarrow{r},t) &= P_0 + P_1(\overrightarrow{r},t) \\ \rho(\overrightarrow{r},t) &= \rho_0 + \rho_1(\overrightarrow{r},t) \\ \overrightarrow{v}(\overrightarrow{r},t) &= \overrightarrow{v_1}(\overrightarrow{r},t) \end{aligned}$$

Avec $P_1 \ll P_0$ et $\rho_1 \ll \rho_0$. On parle d'approximation acoustique.

Pour connaitre l'évolution des trois variables P_1, ρ_1 et $\overrightarrow{v_1}$, il va nous falloir trois équations. L'équation d'Euler (fluide parfait) donne :

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla}P + \overrightarrow{f}_{ext}$$

On néglige les forces extérieurs comme le poids, ainsi que les termes d'ordres supérieur à 1 et on obtient :

$$\rho_0\frac{\partial\overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla}P_1 \tag{1}$$

L'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}\cdot(\rho\overrightarrow{v}) = 0$$

Donne :

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v_1} = 0 \tag{2}$$

Et pour finir, la compressibilité du fluide χ reliant la pression à la densité :

$$\chi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P}$$

Ce qui nous donne :

$$\rho_0 P_1\chi = \rho_1 \tag{3}$$

En combinant les équations 1, 2 et 3, on obtient :

$$\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0\chi}\Delta\rho_1 = 0 \tag{4}$$

On reconnait une équation de d'Alembert d'une onde se propageant à la vitesse $c_s = \sqrt{\frac{1}{\rho_0\chi}}$. Dans l'eau à condition ambiante, ($\rho = 1000\text{kg/m}^3$ et $\chi = 4.4\ 10^{-10}\text{Pa}^{-1}$), on trouve une vitesse de 1500m/s.

1.2 Onde sonore dans un gaz parfait

La partie précédente est vraie pour toute onde se déplaçant dans un fluide. Nous cherchons à présent à caractériser une onde se déplaçant dans l'air, modéliser par un gaz parfait diatomique.

Pour connaitre la vitesse du son, il faut connaitre la compressibilité du fluide χ. Hors, la compressibilité d'un gaz parfait dépend de la nature de la transformation. Newton a supposé en son temps que la compression de l'air durant le passage d'une onde était une compression isotherme. La compressibilité isotherme d'un gaz parfait se trouve rapidement à partir de l'équation d'état :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = \frac{RT}{\mathcal{M}P}\frac{\mathcal{M}}{RT} = \frac{1}{P} \tag{5}$$

Avec $\mathcal{M}$ la masse molaire du fluide. En 1816, Laplace stipule que la compression n'est pas isotherme, mais adiabatique (on a donc $P\rho^{-\gamma} = cste$). On faudrait donc utiliser la compressibilité isentropique :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{csteP^{1/\gamma}}\frac{csteP^{1/\gamma-1}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma P} \tag{6}$$

On obtient donc, en fonction de la compressibilité choisie, deux vitesses pour le son dans l'air :

$$c_N = \sqrt{\frac{RT}{\mathcal{M}}} \qquad\qquad c_L = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mathcal{M}}} \tag{7}$$

Pour de l'air ($\mathcal{M} = 29.0$g/mol) à 300K, on trouve respectivement $c_N = 293$ m/s et $c_L = 347$ m/s.

1.2.1 Trombone de Koenig

On utilise le trombone de Koenig pour déterminer la vitesse du son et discriminer la bonne hypothèse entre Newton et Laplace (sans surprise, Laplace a raison).

Attention, les micros ne marche pas tous ! Les tester en sifflant dedans. Utiliser une fréquence assez haute pour plus de point (2kHz).

1.3 Cas des solides

Ne pas forcément en parler dans la leçon, mais ce préparer à des questions !

Dans le solide, deux modes possibles : un mode longitudinale, correspondant à une onde de compression comme dans un fluide, et un mode transversale, correspondant à une onde de cisaillement.

2 Énergie et intensité

2.1 Puissance d'une onde sonore

La puissance transmise par l'onde à travers un élément de surface $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ vaut :

$$\delta\mathcal{P} = P\overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = (P_0 + P_1)\overrightarrow{v_1}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

De part la nature ondulatoire du phénomène, le terme en $P_0\overrightarrow{v_1}$ s'annule en moyenne au cours du temps, par conséquent on n'en tient pas compte. Cela nous permet de définir un vecteur flux de puissance, équivalent du de Poynting de l'électromagnétisme :

$$\overrightarrow{\Pi} = P_1\overrightarrow{v_1} \tag{8}$$

Par ailleurs, la conservation de l'énergie nous impose que, localement :

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\Pi} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

En ré-utilisant les équations 1,2 et 3 vu au début pour calculer la divergence de $\overrightarrow{\Pi}$, on obtient que la densité d'énergie de l'onde vaut :

$$e = \frac{1}{2}\rho_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_S P_1^2 \tag{9}$$

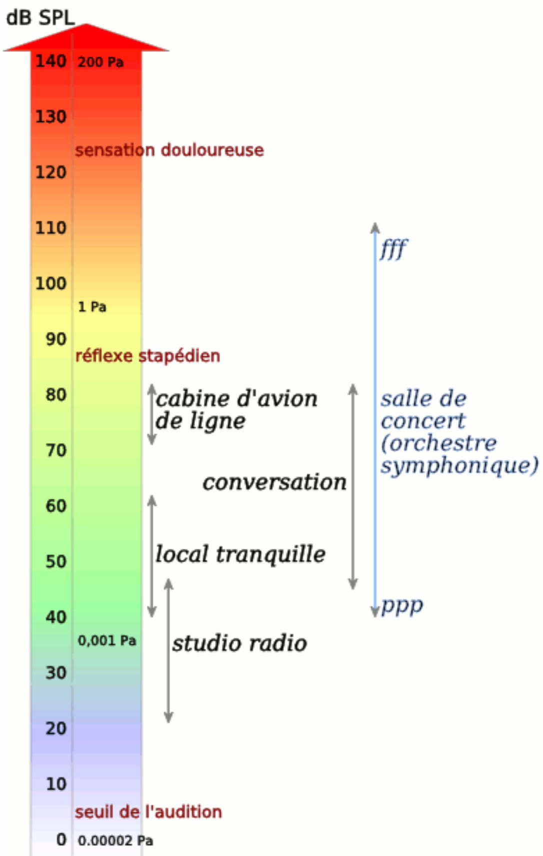
2.2 Intensité d'une onde sonore

On définit donc l'intensité perçue d'un son en décibel :

$$I = 10\log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right) \tag{10}$$

La valeur P_0 de référence est de $10^{-12}\mathrm{W/m^2}$ (1 picowatt par mètre carré).

L'oreille humaine n'est pas sensible de la même manière à toute les fréquences. De plus, comme pour beaucoup de nos sens, la perception du son est logarithmique (d'où l'intérêt de cette échelle). Le maximum de perception de l'oreille humaine se situe entre 2000 et 4000 Hz. Sur cette plage, on peut déceler des son inférieur à 0 décibel. A l'inverse, à 20Hz, nous ne percevons le son qu'à partir de 70dB ! Voir wikipedia pour plus d'info.



Présenter la correspondance décibel/perception pour encrer cela dans le concret.

3 Impédance

3.1 Définition

Nous avons vu que la densité d'énergie de l'onde était :

$$e = \frac{1}{2}\rho_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_S P_1^2 \tag{11}$$

Cela signifie que l'énergie passe périodiquement de la forme d'un énergie cinétique à la forme d'une énergie potentielle.

L'impédance de l'onde acoustique est défini comme le rapport entre l'onde de pression P_1 et l'onde de vitesse v_1. En injectant une opph dans l'équation (1) on obtient immédiatement que

$$Z = \frac{P_1}{v_1} = \frac{\rho_0\omega}{k} = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi}} \tag{12}$$

Pour l'air, on trouve $Z_{air} = 410$ Pa.s/m à 25°C. Pour l'eau, $Z_{air} = 1.5 \times 10^6$ Pa.s/m

3.2 Transmission d'un son

Comment se transmet le son à une interface entre deux milieux d'impédance Z_1 et Z_2 ? La continuité de la pression nous dit :

$$P_i + P_r = P_t \tag{13}$$

La continuité de la vitesse nous dit :

$$P_i/Z_1 - P_r/Z_1 = P_t/Z_2 \tag{14}$$

C'est un système linéaire de deux équations deux inconnues. La solution :

$$P_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} P_i \qquad\qquad P_t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} P_i \tag{15}$$

On en déduit le coefficient de transmission $T = \frac{Z_1}{Z_2}\left(\frac{2Z_2}{Z_2+Z_1}\right)^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2+Z_1)^2}$.

Et le coefficient de réflexion $R = \frac{Z_1}{Z_1}\left(\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}\right)^2 = \left(\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}\right)^2$.

On a bien $R + T = 1$, l'énergie se conserve.

Ainsi, la transmission entre l'eau et l'air est très mauvaise (T=0.001). C'est pour cela qu'on utilise un gel pour les échographies. En effet, le contact sonde/peau n'est pas parfait, car il s'agit d'un contact solide/solide. De petite bulle d'air se loge entre la peau et la sonde, ce qui gène énormément la mesure (les ondes se réfléchissent sur les bulles d'air). C'est pour cela qu'on utilise un gel, dont l'impédance acoustique est proche de celle du corps et de la sonde.

conclusion

Dans cette leçon, nous avons vu comment les ondes de pressions se déplacent dans les fluides. Nous avons vu que, de manière analogique aux ondes EM, nous pouvons définir une énergie volumique et un flux de puissance (vecteur de poynting).

Dans une prochaine leçon, nous nous intéresserons aux instruments de musiques : comment les conditions aux limites contraignent et dirigent l'onde sonore.