D15 – Propagation guidée des ondes.

18 juin 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

- Onde sonore
- Équation de d'Alembert
- Équations de Maxwell

Expériences

- guidage d'une onde sonore dans un tube pvc
- banc hyperfréquence

Table des matières

Introduction

Dans la vie, nous utilisons tout le temps les ondes pour nos communications. Onde sonore lorsqu'on se parle, onde électromagnétique dans les fibres optiques, onde radio, micro-onde (wifii), etc...

Mais voila, emmètre une onde c'est bien, mais la faire arriver au destinataire, c'est mieux ! Comment éviter que la puissance de l'onde ne décroissent pas (trop) avec la distance (on rappelle que l'énergie d'une onde sphérique décroit en r^2), où bien comme atteindre un destinataire derrière un obstacle (typiquement, la courbure de la Terre) ?

Ce sera le sujet de la leçon d'aujourd'hui sur le guidage des ondes.

Expérience : On utilise un couple émetteur récepteur ultrasons Jeulin (P.73.23) à 40 kHz. Nécessité d'une propagation guidée : à 2 mètres, sans tuyau, quasiment aucun signal. Avec un tuyau de faible diamètre (<5 mm) il n'y a que le mode 0, et on voit le signal non déformé à l'arrivée. Mais : avec un tuyau de plus grand diamètre (25 mm) on voit tout un tas de nouveaux signaux qui arrivent. . . Le signal est donc déformé. Peut-on comprendre l'apparition de ces nouveaux signaux ? Peut-on toujours les éviter ? Bien entendu, on ne se restreindra pas à l'acoustique car la plupart des signaux que l'on transmet sont plutôt des ondes électromagnétiques ou des signaux électriques.

1 Cas de l'onde acoustique

1.1 Guide d'onde rectangulaire

Pour y voir plus clair, voyons comment se comporte une onde acoustique dans un guide rectangulaire de dimension a, b.

On rappelle l'équation d'une acoustique :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

On recherche une solution harmonique : $p = f(x)g(y)h(z)\exp(i\omega t)$. On injecte cette solution dans l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{h(z)}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \tag{2}$$

On a une somme de 4 termes ne dépendant pas des même variables. Pour que cette somme soit toujours nul, il faut que ces termes soient constants.

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k_x^2 \tag{3}$$

$$\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -k_y^2 \tag{4}$$

$$\frac{1}{h(z)}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -k_z^2 \tag{5}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{6}$$

Injectons les conditions aux limites : la vitesse des molécules doit être nul au parois, ce qui impose que le gradient de la pression est également nulle au parois. On en déduit que :

$$f(x) = A\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad g(y) = B\cos\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \qquad \frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \tag{7}$$

Chaque combinaison n, m est un mode de propagation de l'onde dans le guide.

1.2 Fréquences de coupure

Pour chaque mode n, m, il existe une pulsation de coupure, notée $\omega_{n,m}$ en deçà de laquelle k_z^2 devient négatif : l'onde est évanescente, elle ne se propage pas.

$$\omega_{n,m}^2 = c^2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + c^2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \tag{8}$$

Plus les dimensions du guide sont courtes, plus les fréquences ce coupures sont hautes. C'est pour cela que, dans l'expérience introductive, seul un mode passe dans le petit guide (signal non déformé) tandis que plusieurs modes passe dans le gros guide (signal déformé).

1.3 Vitesse de propagation des modes

Selon un mode quelconque, l'onde se propage le long du guide selon l'équation :

$$p(x,y,z,t) = f(x)g(y)\exp(i(\omega t - k_z z) \tag{9}$$
$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{n,m}^2}{c^2}} \tag{10}$$

On en déduit la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{n,m}^2}{\omega^2}}} \tag{11}$$

Ainsi que la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_{n,m}^2}{\omega^2}} \tag{12}$$

Il y a deux mécanisme de déformation d'un signal Deux ondes de pulsations différentes se déplacent selon des vitesses différentes : le signal s'étale au cours du temps.

Si on excite le guide avec un pulsation élevé, on excite plusieurs modes, avec chacun leurs vitesses de propagation.

Remarque : Dans le cas de l'onde acoustique, le mode $0,0$ est intéressant : la fréquence de coupure est alors de 0Hz. L'onde se propage sans dispersion.

Dans le cas du tube, la première fréquence de coupure est de l'ordre de 6800Hz pour le tube de 25mm, plusieurs modes sont excités. Elle est de l'ordre de 34000Hz pour le petit tube, il y a moins de modes excités.

2 Cas de l'onde électromagnétique

On commence par présenter le banc hyperfréquence : un guide d'onde rectangulaire équipé de différents modules pour générer et mesurer l'onde. On place à l'extrémité du banc une plaque sur laquelle l'onde se réfléchit. De l'autre côté, on place un éténuateur, grâce à lui tout se passe comme si le guide était semi-infini : on va avoir des ondes stationnaires (onde incidente plus onde réfléchie) mais pas de fréquence de résonance (limite virtuellement à l'infinie).

2.1 Modes TE et TM

Voici les équations de maxwell dans dans un guide plan-plan :

$$\begin{aligned}
\partial_x E_x + \partial_z E_z &= 0\\
\partial_x B_x + \partial_z B_z &= 0\\
\begin{pmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \partial_t B_x \\ \partial_t B_y \\ \partial_t B_z \end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y \end{pmatrix} &= \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} \partial_t E_x \\ \partial_t E_y \\ \partial_t E_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On peut séparer ce système en deux systèmes d'équation indépendants : l'un selon E_x, E_z, B_y (rouge) et l'autre selon B_x, B_z, E_y (bleu). On appelle ces modes, respectivement, les modes transverses magnétiques ($B_z = 0$) et transverses électriques ($E_z = 0$).

2.2 Onde TE dans le banc hyperfréquence

Revenons au guide d'onde rectangulaire. On recherche une solution telle que $E_z = 0$ (un mode TE).

Pour cela, regardons les équations sur $B_z(x,y,z,t) = f(x)g(y)\exp(i\omega t - k_z z))$. A partir des relations de maxwell on trouve :

$$B_x = -\frac{k_z}{\omega}E_y \qquad B_y = \frac{k_z}{\omega}E_x \tag{13}$$
$$-\frac{i\omega}{c^2}E_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} = -ik_z B_y \qquad -\frac{i\omega}{c^2}E_y = -\frac{\partial B_z}{\partial x} = ik_z B_x \tag{14}$$

Remarque Pour avoir une TEM, il faudrait que $B_z = 0$. Hors, dans ce cas la, on aurait toute les autres composantes nulles. Il n'y a pas de TEM pour le guide rectangulaire. De manière plus général, il n'y a pas de TEM pour un guide composé d'une seule pièce conductrice fermée.

On en déduit une équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - k_z^2 B_z + \frac{\omega^2}{c^2} B_z = 0 \tag{15}$$

On retrouve la même équation que pour l'onde acoustique ! En utilisant la condition au limite (la composante tangentielle du champ électrique s'annule), on obtient le même résultat :

$$B_z = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \exp(i(\omega t - k_z z)) \tag{16}$$

Il y a tout de même de petite différence : le mode $\mathrm{TE}_{0,0}$ n'existe pas car (si B_z est constant selon x et y, alors le champ électrique et nul selon ces directions).

Remarque : On peut faire la même étude pour les modes TM. On trouve alors la même solution, mais avec des sinus au lieu des cosinus. Par conséquent le premier mode TM est le mode $\mathrm{TM}_{1,1}$. Si on se place entre la fréquence de coupure $\omega_{1,0}$ et $\omega_{1,1}$, on ne verra que le mode $\mathrm{TE}_{1,0}$, c'est ce que l'on fait avec le banc.

Expérience : On verifie la loi de dispersion sur le banc hyperfréquence (voir protocole TP électromagnétisme p55).

conclusion

Nous avons vu tout au long de cette leçon qu'il était possible, en imposant des conditions aux limites bien choisies à une onde, de récupérer un signal se propageant avec des pertes minimales dans la direction que nous souhaitons.Cependant, en faisant cela, l'onde qui se propage n'est en général plus la même que celle qui a été émise initialement car la propagation dans un guide d'ondes se fait selon des modes propres du guide qui n'ont rien à voir avec la propagation libre. On ajoute ainsi de nouvelles sources de dispersion à notre propagation. Pour limiter ces effets, on essaye au maximum de se placer dans les modes fondamentaux du guide, qui ont des propriétés très proches de la propagation libre.Cette approche reste incomplète car les modèles que nous avons utilisés se plaçaient dans un cadre "parfait". Pour étudier plus précisément les guides d'ondes, il faudrait également prendre en compte l'absorption d'énergie par le guide, qui peut avoir des conséquences mineures (baisse de la qualité d'une vidéo reçue par fibre optique) ou plus importantes (résonances d'une turbine aéronautique par exemple)