

D18 : Interférométrie à Division d'Amplitude

Simon JEANNE, Corentin NAVEAU

19 novembre 2020

Niveau L2. Prérequis :

1. Interférométrie à Division du front d'onde
2. Notion d'espace de Fourier

Table des matières

1	Conditions de formation des interférences	1
1.1	Cohérence temporelle	1
1.2	Cohérence spatiale	2
1.3	Théorème de localisation	4
1.3.1	Expérience qualitative	4
2	Interféromètre de Michelson	4
2.1	Lame d'air	4
2.2	Coin d'air	5
2.3	Expérience : Mesure du doublet du Sodium	6
3	Interféromètre de Fabry-Pérot	6
3.1	Figure d'interférence	6
3.2	Finesse	7
3.3	Pouvoir séparateur	7

1 Conditions de formation des interférences

Jusqu'à présent, nous considérons les interférences dans le cas de sources ponctuelle et d'onde plane progressive monochromatique.

Si ces hypothèses sont pratiques pour réaliser des calculs, elles sont en revanche peu réaliste : une onde n'est jamais plane progressive et monochromatique : elles ont une certaine extension dans l'espace temps (longueur et durée) ainsi qu'une certaine extension en fréquence. De même, une source n'est jamais parfaitement ponctuelle.

1.1 Cohérence temporelle

La cohérence temporelle concerne les effets de l'extension en durée et en fréquence de l'onde. Prenons l'exemple de l'onde suivante :

$$E(x, t) = E_0 \Pi\left(\frac{kx - \omega t}{kl}\right) \exp(i(kx - \omega t)) \quad (1)$$

Cette onde est équivalente à une onde plane progressive monochromatique sur une longueur l de l'espace. Elle est nulle ailleurs.

Plaçons nous en un point M tel qu'il existe deux chemins optiques pour que la lumière aille de la source S au point M , de longueurs respectives L et $L + \delta$. Alors, l'onde totale reçue en M sera de la forme :

$$E(t) = E_0 \Pi\left(\frac{kL - wt}{kl}\right) \exp(i(kL - wt)) + E_0 \Pi\left(\frac{k(L + \delta) - wt}{kl}\right) \exp(i(k(L + \delta) - wt)) \quad (2)$$

Ainsi, si δ est petit devant la longueur du paquet d'ondes l , alors il y a interférence. Si δ est grand devant la longueur du paquet d'onde l , alors les deux paquets arrivent l'un après l'autre : il n'y a pas d'interférence et leurs énergies s'additionnent simplement.

Entre les deux, il y a une phase de transition durant laquelle le contraste des interférences s'effondre.

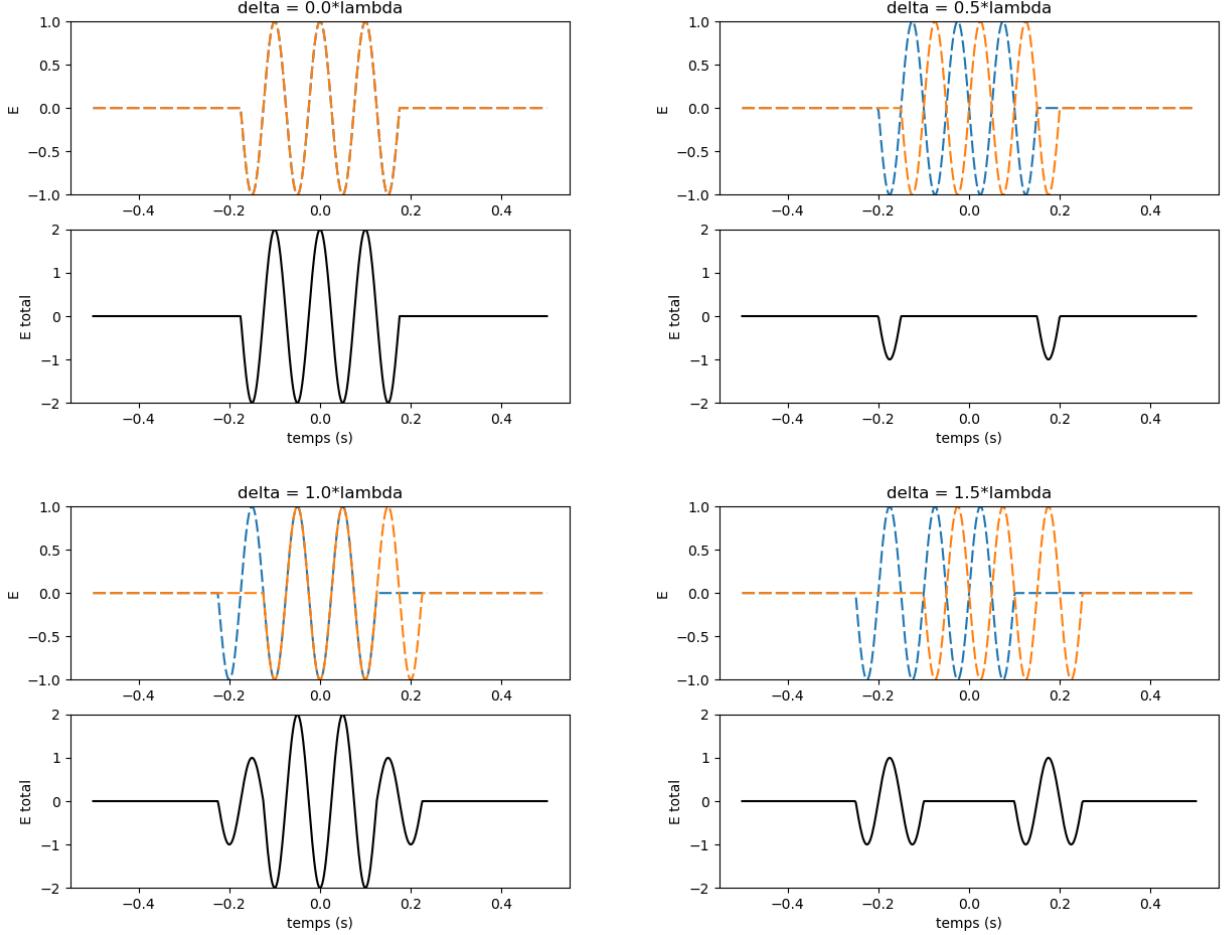


FIGURE 1 – Cohérence spatiale

1.2 Cohérence spatiale

Les sources lumineuses réelles ne sont pas ponctuelle, elles ont une certaine extension spatiale.

Prenons le cas simple de deux sources ponctuelles (voir figure [2]). Nous supposons que les deux sources émettent une onde plane progressive monochromatique (nous ne tenons pas compte de la cohérence temporelle).

L'intensité reçue au point M est alors :

$$I = I_1 \cos^2(2\pi\delta_1/\lambda) + I_2 \cos^2(2\pi\delta_2/\lambda) \quad (3)$$

Les deux différences de marche δ_1 et δ_2 n'ayant pas de raison a priori d'être égales, les deux figures d'interférences $I_1 \cos^2(2\pi\delta_1/\lambda)$ et $I_2 \cos^2(2\pi\delta_2/\lambda)$ ne sont pas les mêmes.

La différence entre les deux différences de marche :

$$\delta_2 - \delta_1 = \Delta\delta = ([S_2A] - [S_2B]) - ([S_2A] - [S_1B]) \quad (4)$$

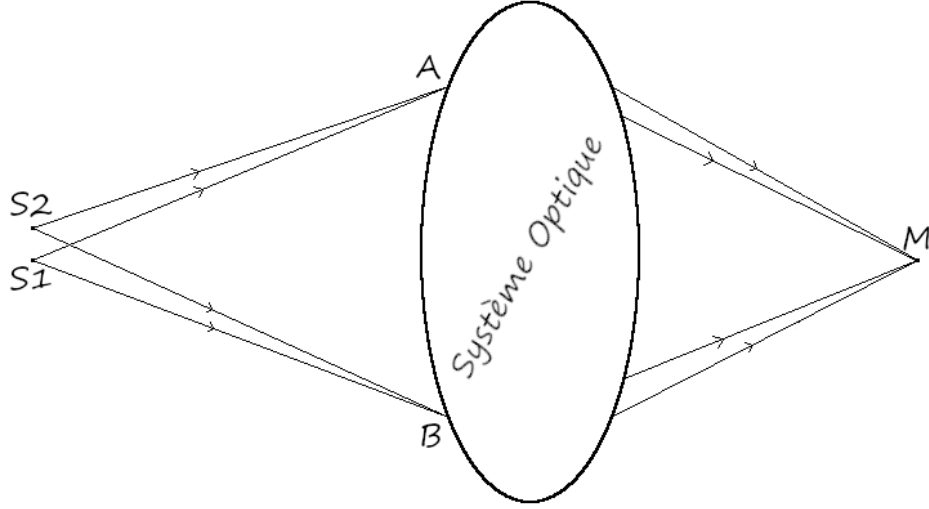


FIGURE 2 – Cohérence spatiale

On suppose que la source est suffisamment petite pour pouvoir considérer que $\overrightarrow{S_1 A} // \overrightarrow{S_2 A}$ et $\overrightarrow{S_1 B} // \overrightarrow{S_2 B}$. L'équation ci-dessus se simplifie alors :

$$\Delta\delta \simeq \overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{u_A} - \overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{u_B} = \overrightarrow{S_2 S_1} \cdot (\overrightarrow{u_A} - \overrightarrow{u_B}) \quad (5)$$

Démonstration

Les points A et B sont les antécédents de M à travers les deux voies de l'interféromètre. On suppose que les distances AM et BM sont indépendantes du rayon (stigmatisme rigoureux).

Soit deux sources $S_1 = S$ et $S_2 = S + dS$ proche l'une de l'autre.

La différence de marche pour la source 1 :

$$\delta_1 = S_1 A + AM - (S_1 B + BM) \quad (6)$$

La différence de marche pour la source 2 :

$$\delta_2 = S_2 A + AM - (S_2 B + BM) \quad (7)$$

La différence entre les deux différences de marche :

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = S_1 A - S_1 B - S_2 A + S_2 B = d(SB) - d(SA) \quad (8)$$

On note $\overrightarrow{u_A}$ et $\overrightarrow{u_B}$ les vecteurs unitaires allant de S à A et B , respectivement.

$$\Delta\delta = d(\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{u_B}) - d(\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{u_A}) = d(\overrightarrow{SB}) \cdot \overrightarrow{u_B} + \overrightarrow{SB} \cdot d(\overrightarrow{u_B}) - d(\overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{u_A} - \overrightarrow{SA} \cdot d(\overrightarrow{u_A}) \quad (9)$$

Or

$$\overrightarrow{SA} \cdot d(\overrightarrow{u_A}) = \frac{1}{2} S A d(|\overrightarrow{u_A}|^2) = 0 \quad (10)$$

De même pour $\overrightarrow{SB} \cdot d(\overrightarrow{u_B})$

Finalement, on a :

$$\Delta\delta = d(\overrightarrow{SB}) \cdot \overrightarrow{u_B} - d(\overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{u_A} = d(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{S}) \cdot \overrightarrow{u_B} - d(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{S}) \cdot \overrightarrow{u_A} \quad (11)$$

$$\Delta\delta = d(\overrightarrow{S}) \cdot (\overrightarrow{u_A} - \overrightarrow{u_B}) \quad (12)$$

1.3 Théorème de localisation

Pour que la cohérence spatiale de la source ne soit plus un problème, il faut que $\Delta\delta(S_i, S_j) = 0$ pour toutes les sources S_i et S_j composante ponctuelle de la source totale étendue.

Il faut donc soit que $\vec{S_i S_j} \perp (\vec{u_A} - \vec{u_B})$, ce qui implique une géométrie particulière, soit que $\vec{u_A} = \vec{u_B}$.

C'est cette deuxième possibilité qui nous intéresse. Elle implique que, au lieu de faire interagir deux rayons ayant initialement deux vecteurs d'onde de directions différentes, comme pour les fentes de Young par exemple, nous allons faire interagir un rayon avec lui même.

Ce type d'interférence particulière se nomme les interférométrie à division d'amplitude. Les autres interférences sont dites "à division du front d'onde".

Le théorème de localisation est le corolaire de ce raisonnement. Il stipule que, dans le cas d'une source étendue spatialement, les interférences effectives sont localisées au voisinage de la surface d'interférence à division d'amplitude.

1.3.1 Expérience qualitative

On regarde les interférences par division d'amplitude sur un interféromètre (on prend le Michelson en lame d'air, qui resservira plus loin). Petit à petit, on éloigne l'écran de la surface des interférences par division d'amplitude. L'extension spatiale de la source a de plus en plus d'importance ($\Delta\delta(S_i, S_j) \neq 0$). Le contraste de la figure d'interférence chute. On diaphragme la source pour se rapprocher d'une source ponctuelle. Le contraste remonte, ce qui prouve le lien entre extension spatiale de la source et localisation des interférences.

2 Interféromètre de Michelson

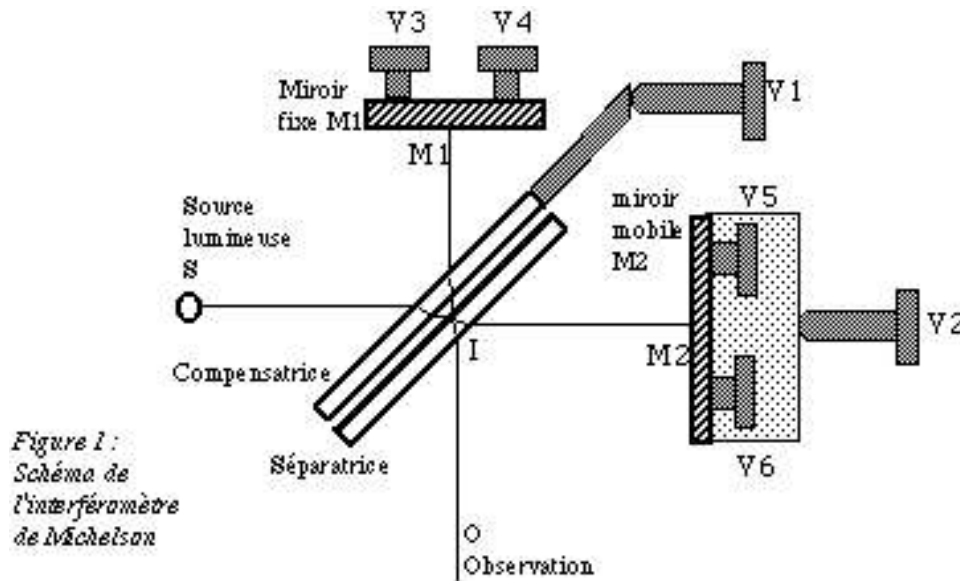


FIGURE 3 – Interféromètre de Michelson

2.1 lame d'air

En lame d'air, un rayon, divisé en deux par la séparatrice, interagit avec lui même à l'infini (ou dans le plan focal image d'une lentille convergente).

Les interférences situés à l'infini sont des interférences par division d'amplitude. Les autres sont des interférences à division du front d'onde.

Dans cette configuration, il y a symétrie autour de l'axe optique. Les interférences prennent la forme d'anneaux. La différence de marche $\delta = 2e \cos(\theta)$, avec e la distance entre les deux miroirs et θ

l'angle d'incidence du rayon. Dans le plan focal d'une lentille convergente, $\delta = 2e \cos(r/f)$ avec r la distance au centre de la figure.

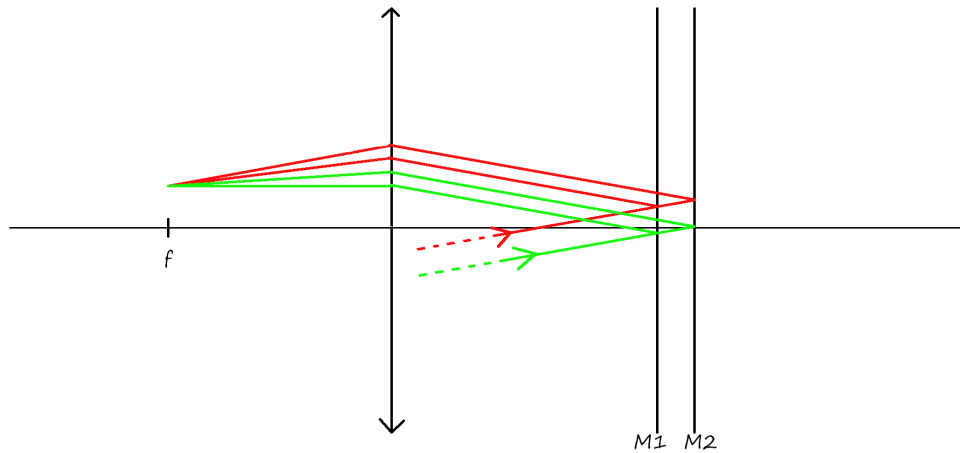


FIGURE 4 – Lamme d'air

Remarque : En lamme d'air, la différence de marche dépend directement de l'angle d'incidence des rayons sur les miroirs. Il faut donc faire converger la source sur les miroirs pour maximiser les angles d'incidences et donc le nombre d'anneaux observés.

2.2 Coin d'air

En coin d'air, un rayon, divisé en deux par la séparatrice, interagit avec lui même au voisinage des miroirs (ou sur l'image des miroirs à travers une lentille).

Les interférences situées au voisinage des miroirs sont des interférences par division d'amplitude. Les autres sont des interférences à division du front d'onde.

Dans cette configuration, les interférences prennent la forme de raies. Elles sont orientées parallèlement à l'axe de rotation des miroirs. La différence de marche $\delta = 2ix$, avec i l'angle entre les deux miroirs et x la position du point d'interférence au voisinage des miroirs. A travers une lentille, $\delta = 2iX/\gamma$ avec γ le grandissement de l'image des miroirs et X la position sur l'écran.

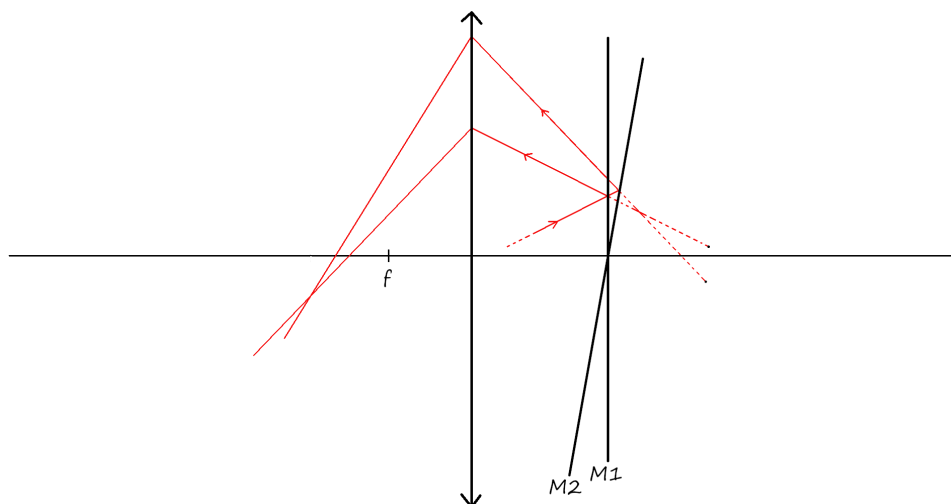


FIGURE 5 – Coin d'air

Remarque : En coin d'air, il vaut mieux éclairer les miroirs avec une lumière parallèle afin que la

différence de marche réelle soit la plus proche possible de la différence de marche approximée $\delta = 2ix$.

2.3 Expérience : Mesure du doublet du Sodium

Une lampe à sodium présente deux raie d'émission λ_1 et λ_2 très proches l'une de l'autre à environ 589nm.

La figure d'interférence de ces deux raies prend la forme :

$$I = I_1 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) + I_2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right) \quad (13)$$

On suppose que $I_1 \simeq I_2$. De plus on pose $\lambda_m = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ et $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

On peut alors montrer que :

$$I = 2I_1 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m} \right) \cos \left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right) \right) \quad (14)$$

La figure d'interférence possède une enveloppe d'équation :

$$\mathcal{E}_{\pm} = 2I_1 \left(1 \pm \cos \left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right) \right) \quad (15)$$

Cette enveloppe présente des nœuds pour lesquelles le contrastes des interférences s'annule. Ces nœuds sont distants de $\lambda^2/\Delta\lambda$.

En charriotant le bras mobile du Michelson sur une longueur L , on fait varier la différence de marche de $2L$. Ainsi, en mesurant la distance de chariotage séparant p nœuds, on obtient une mesure de $\Delta\lambda$:

$$\widehat{\Delta\lambda} = \frac{p\lambda_m^2}{2L_{meas}} \quad (16)$$

$$\text{Var}(\widehat{\Delta\lambda}) = \left(\frac{\widehat{\Delta\lambda}}{L_{meas}} \right)^2 \text{Var}(L_{meas}) = \left(\frac{2\widehat{\Delta\lambda}^2}{p\lambda_m^2} \right)^2 \text{Var}(L_{meas}) \quad (17)$$

La demi-graduation du Michelson est de 0.005 mm. Comme mesurer L_{meas} nécessite de prendre deux positions, on a $\text{Var}(L_{meas}) = 2(0.005)^2 \text{ mm}^2$. En pratique, on peut s'attendre à une erreur de l'ordre de quelque millièmes de nanomètre !

3 Interféromètre de Fabry-Pérot

L'interféromètre de Fabry-Pérot consiste en une lame d'indice n dont les deux faces parallèles présentent un même coefficient de réflexion R .

3.1 Figure d'interférence

De manière analogue au Michelson en lame d'air, la différence de marche entre deux rayons successifs est $\delta = 2nl \cos(\theta)$. Par ailleurs, chaque rayons subit deux transmissions. Le j -ème rayon subit $2j$ réflexions. Ainsi, le j -ème rayon peut être décrit par :

$$E_j = E_I (1 - R) R^j \exp(ikj\delta) \exp(i(kL - wt)) \quad (18)$$

La somme de tout les rayons devient :

$$\sum_{j=0}^{m-1} E_j = E_I (1 - R) \exp(i(kL - wt)) \frac{1 - R^m \exp(ikm\delta)}{1 - R \exp(ik\delta)} \quad (19)$$

En faisant tendre m vers l'infini :

$$\sum_{j=0}^{\infty} E_j = E_I (1 - R) \exp(i(kL - wt)) \frac{1}{1 - R \exp(ik\delta)} \quad (20)$$

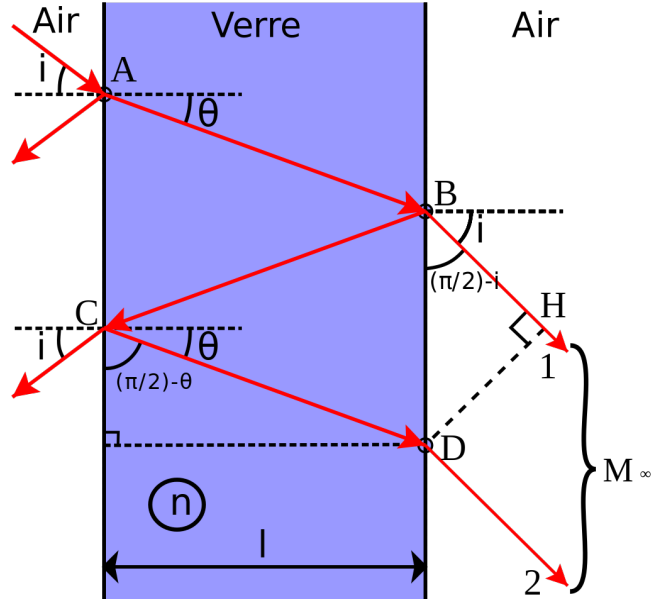


FIGURE 6 – Fabry-Perot

L'intensité lumineuse :

$$I \propto EE^* = \frac{E_I^2(1-R)^2}{(1 - R \exp(ik\delta))(1 - R \exp(-ik\delta))} = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\frac{\pi\delta}{\lambda})} \quad (21)$$

3.2 Finesse

Deux pics successifs de la figure d'interférence sont séparés par une différence de marche $\delta = \lambda$. La largeur à mi-hauteur d'un pic, que l'on notera $\Delta\delta$, est telle que :

$$1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\pi\Delta\delta/2}{\lambda}\right) = 2 \quad (22)$$

C'est à dire lorsque :

$$\Delta\delta = \frac{\lambda(1-R)}{\pi\sqrt{R}} \quad (23)$$

On définit la finesse du Fabry-Perot par le rapport de la distance entre deux maxima et la largeur à mi-hauteur :

$$\mathcal{F} = \frac{\lambda}{\Delta\delta} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \quad (24)$$

3.3 Pouvoir séparateur

Soit deux raies de longueurs d'onde proches λ_1 et λ_2 . On notera λ_m la moyenne et $\Delta\lambda$ la différence de ces deux longueurs d'onde. Regardons les conditions pour que le Fabry-Pérot sépare ces deux longueurs d'onde. Les figures d'interférences produites par ces deux raies s'additionnent. L'une est de période λ_1 et l'autre de période λ_2 . Ainsi, plus la différence de marche grandit, plus les deux figures s'écartent l'une de l'autre. Or on a $\delta_{max} = \delta(\theta = 0) = 2nl$, la différence de marche au centre de la figure d'interférence. Ainsi, la séparation entre les deux premiers pics (en partant du centre de la figure) des deux figures d'interférences sera :

$$\text{ecart}_{\max} = [\delta_{max}/\lambda_m] \Delta\lambda \simeq \frac{\delta_{max}}{\lambda_m} \Delta\lambda = \frac{2nl}{\lambda_m} \Delta\lambda \quad (25)$$

Les deux raies seront bel et bien séparées si $\text{ecart}_{\max}$ est supérieur à la largeur à mi-hauteur des pics $\Delta\delta$ que nous avons étudié dans la section précédente. C'est à dire si :

$$\Delta\lambda > \frac{\lambda_m^2}{2nl\mathcal{F}} \quad (26)$$

Application : pour $nl = 50\mu\text{m}$, $R = 0.95$ et $\lambda_m = 589\text{nm}$, on peut séparer les raies à condition que $\Delta\lambda > 0.057\text{nm}$!