

D19 – DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

9 juin 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

- Optique Géométrique
- Onde électromagnétique
- Interférence à deux ondes
- Transformée de Fourier

Expériences

- ☛ Diffraction par une fente
- ☛ Expérience d'Abbe

Table des matières

1	Diffraction par une fente	2
1.1	Principe de Huygens-Fresnel	2
1.2	Approximation de Fraunhofer	3
2	Effets et Applications	4
2.1	Critère de Rayleigh	4
2.2	Optique de Fourier	5

Introduction classique

En leçon d'électromagnétisme, nous avons vu que la lumière est en réalité une onde électromagnétique. De part cette nature ondulatoire, on s'attend à ce que les prédictions de l'optique géométrique soit mise en échec dans certaines circonstances, et c'est effectivement ce que l'on observe.

Par exemple, si un faisceau de rayons parallèles frappent une fente rectangulaire, on s'attend (d'après l'optique géométrique) à ce que la lumière projetée sur un écran nous redonne directement l'image de la fente. A l'inverse, la tache lumineuse s'étale bien au delà de ce que l'optique géométrique prévoit. C'est ce qu'on appelle la diffraction, et ce sera le sujet de la leçon d'aujourd'hui.

Introduction alternative

Dans une leçon précédente, nous avons étudié le cas d'une interférence à deux ondes. Pour rappeller, lorsque deux sources sont cohérentes (cohérence spatiale, temporelle, et de polarisation), leurs ondes interfèrent et on observe une intensité lumineuse de la forme $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda})$.

Toutefois, nous avons constaté expérimentalement que, dans le cas des fentes de Young, on n'observe pas exactement la figure prévue.

En effet, les fentes ne constituent pas des sources ponctuelles parfaites, elles ont une certaine extension spatiale. De fait, au lieu de deux sources ponctuelles, nous avons un continuum de sources s'étendant spatialement.

Ce sont les interférences de ce continuum d'ondes (au lieu d'ondes discrètes) qui constituent le phénomène de diffraction.

1 Diffraction par une fente

Nous cherchons dans cette partie à modéliser le comportement d'une onde plane progressive monochromatique se propageant à travers une fente de largeur a centrée en O .

1.1 Principe de Huygens-Fresnel

Il est difficile de modéliser le passage d'une onde lumineuse à travers une fente à l'aide de l'électromagnétisme. Il faudrait calculer les courants induits dans le matériau par l'onde et la réaction de ces courants sur l'onde elle-même, ce qui serait très laborieux.

A la place, nous utilisons le principe de Huygens-Fresnel qui stipule que chaque point d'un front d'onde se comporte lui-même comme une source fictive secondaire émettant une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à l'onde incidente et phase opposée à celle-ci (ces sources fictives sont donc cohérentes entre elles). Un schéma permet de se convaincre que ce principe reproduit bien la propagation d'une onde dans le cas d'une onde plane ou sphérique.

Remarque : Cela justifie l'hypothèse que nous avons introduite pour la leçon sur les fentes de Young que deux fentes infiniment fines éclairées par une onde plane se comportent comme deux sources ponctuelles cohérentes!

Remarque avancée : Gustav Kirchhoff proposa en 1882 une justification plus rigoureuse du principe de Huygens-Fresnel. En particulier, il démontre que l'onde fictive émise n'est pas isotrope, mais dépend de l'angle θ selon laquelle elle est émise selon le coefficient $K = \frac{i}{\lambda} \frac{1 + \cos(\theta)}{2}$. La clé de la démonstration réside dans l'utilisation du théorème de Helmholtz-Kirchhoff. Ce théorème permet de calculer l'onde en un point M à condition de connaître l'onde sur une surface entourant M . On choisit une surface sur laquelle l'onde est nulle partout sauf sur l'ouverture (diffraction par une ouverture) et on obtient le résultat voulu. On remarque par ailleurs que K est imaginaire pur : l'onde fictive est en opposition de phase par rapport à l'onde incidente.

Selon ce principe, l'onde se propageant après la fente est proportionnelle à l'intégrale des ondes fictives produites par le front d'onde au niveau de la fente. Ainsi, l'onde reçue au point $M(X, Z)$ vaut :

$$E(X, Z, t) = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{K E_i(t)}{\sqrt{Z^2 + (X-x)^2}} \exp\left(ik\sqrt{Z^2 + (X-x)^2}\right) dx \quad (1)$$

Le principe n'est vrai que si l'angle $\sin(\theta) = \frac{X-x}{OM}$ est faible (car il faut pouvoir considérer que K est constant).

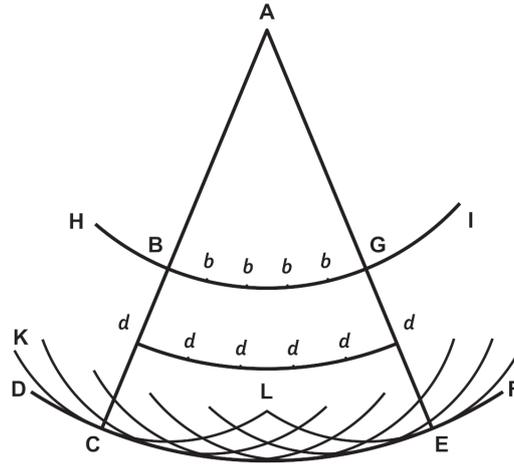


FIGURE 1 – Principe de Huygens-Fresnel

Cela revient à supposer que que $Z \gg a$ et $Z \gg X$. L'équation devient alors :

$$E(X, Z, t) \simeq \int_{-a/2}^{a/2} \frac{KE_i(t)}{OM} \exp\left(ik\sqrt{OM^2 + x^2 - 2xX}\right) dx$$

$$E(X, Z, t) \simeq \int_{-a/2}^{a/2} \frac{KE_i(t)}{OM} \exp\left(ikOM\left(1 + \frac{x^2}{2OM^2} - \frac{xX}{OM^2}\right)\right) dx$$

$$E(X, Z, t) \simeq KE_i(t) \frac{\exp(ikOM)}{OM} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(ik\left(\frac{x^2}{2OM} - \frac{xX}{OM}\right)\right) dx$$

Cette équation est celle de la diffraction de Fresnel.

1.2 Approximation de Fraunhofer

On parle de diffraction de Fraunhofer si on peut négliger le terme en $\frac{kx^2}{2OM}$. Ce terme est négligeable si $F = \frac{a^2}{\lambda Z} \ll 1$. F est un nombre sans dimension appelé le nombre de Fresnel. C'est ce nombre qui nous permet de savoir si nous sommes bien dans les conditions de Fraunhofer. On a alors :

$$E(X, Z, t) \simeq KE_i(t) \frac{\exp(ikOM)}{OM} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-ik\frac{xX}{OM}\right) dx$$

$$E(X, Z, t) \simeq KE_i(t) \frac{\exp(ikOM)}{OM} a \operatorname{sinc}\left(\frac{kXa}{2OM}\right)$$

$$E(X, Z, t) \simeq KE_i(t) \exp(ikOM) \frac{a}{OM} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda OM}\right)$$

$$E(OM, \theta, t) \simeq KE_i(t) \exp(ikOM) \frac{a}{OM} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin(\theta)\right)$$

On en déduit l'intensité $I(OM, \theta)$ observée sur l'écran :

$$I(OM, \theta) = \frac{1}{2} |E(OM, \theta)|^2 = I_{max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin(\theta)\right) \quad (2)$$

Expérience : mesure de la largeur d'une fente

On éclaire une fente avec un faisceau parallèle à l'aide d'un montage laser+condenseur+lentille. On place un écran à une distance D de la source. On repère sur papier millimétré les annulations. Avec i un entier non nul les positions des annulations sont données par :

$$\frac{a}{\lambda D} X_i = i \quad (3)$$

En traçant l'ordre des annulations i en fonction de X_i , on obtient une droite de pente $p = \frac{a}{\lambda D}$. Connaissant la longueur d'onde du laser et la distance D , on remonte à la largeur $a = p\lambda D$. On propage les incertitudes de p (donnée par regressi)

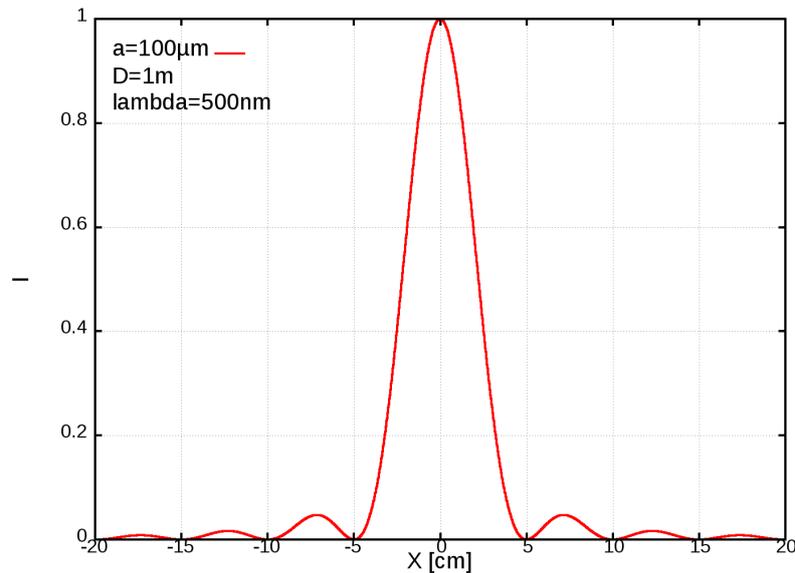


FIGURE 2 – Diffraction par une fente

et sur D (estimée par l'expérimentateur) : $\sigma_a^2 = \lambda^2 D^2 \sigma_p^2 + p^2 \lambda^2 \sigma_D^2$ (on pourra considérer l'erreur sur la longueur d'onde du lase, négligeable devant le reste). On compare la largeur retrouvée avec les indications du constructeur. On peut également calculer le nombre de Fresnel $F = \frac{a^2}{\lambda D}$ et vérifier que nous sommes bien dans les conditions de Fraunhofer.

2 Effets et Applications

2.1 Critère de Rayleigh

L'existence de la diffraction limite la précision des instruments optiques. En effet, la lumière émise par l'objet étudié diffracte sur les bords de l'instrument optique. Ainsi, deux sources trop proches l'une de l'autre formeront deux tâches de diffraction confondues. Il sera alors impossible de discerner les deux sources.

Le critère de Rayleigh stipule que deux sources ponctuelles sont discernables si le maximum d'intensité de l'une tombe sur le premier minimum d'intensité de l'autre, ou plus loin. Une illustration valant mieux qu'un long discours, voici une [animation](#) de l'université du Mans illustrant cela.

Dans le cas d'un instrument d'ouverture circulaire, la figure de diffraction est de la forme :

$$I \propto \frac{J_1\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin(\theta)\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin(\theta)} \quad (4)$$

avec J_1 la fonction de Bessel de premier ordre (la figure de diffraction s'appelle alors une tache d'Airy).

Sur l'image ci-dessus, prise par hubble, on distingue clairement les tâche d'Airy formées par la diffraction de la lumière sur le bord du télescope, ainsi que la diffraction sur les barres soutenant le miroir secondaire (araignée du télescope).

La première annulation de la fonction de Bessel du premier ordre est atteinte lorsque $\frac{a \sin(\theta)}{\lambda} \simeq 1.22$. On peut donc définir l'angle de Rayleigh :

$$\theta_R \simeq 1.22 \frac{\lambda}{a} \quad (5)$$

Ainsi, pour le télescope Hubble (2.4 mètres de diamètre) et une longueur d'onde de 500nm, on trouve $\theta_R \simeq 0.05$ seconde d'arc. Cela peut sembler peu, mais c'est tout de même 50 fois supérieur au diamètre angulaire de proxima du centaure ($0.15R_\odot$, 4.2 a.l), l'étoile la plus proche de nous ! On est tout juste à la limite de résolution de la géante Bételgeuse ($1000R_\odot$ et 643 a.l). Pour augmenter le pouvoir de résolution des instruments astronomique, on peut relier des télescopes entre eux afin de créer un télescope virtuelle plus grand. C'est le cas de ALMA (Atacama Large Millimeter/submillimeter Array), qui permet d'obtenir un pouvoir de résolution équivalent à un appareil de 16 km de diamètre. A une longueur d'onde de 890µm, on atteint une résolution de 0.014 seconde d'arc, ce qui est suffisant pour résoudre la surface de l'étoile géante !

Remarque : diamètre angulaire d'une étoile (seconde d'arc) = $0.03 * R_*/D_*$ avec R_* son rayon en rayon solaire et D_* sa distance en année lumière.



FIGURE 3 – pillars of creation ; Hubble ; image complète

2.2 Optique de Fourier

Nous avons vu le calcul de la diffraction par une fente. Voyons à présent l'effet de la diffraction par un objet quelconque.

L'objet diffractant est représenté par sa fonction de transparence $tr(x, y)$. Cette fonction peut être complexe (si l'objet déphase l'onde lumineuse).

L'onde électromagnétique observée au point M est alors :

$$E(M) \propto \iint tr(x, y) \exp\left(ik\sqrt{Z^2 + (X-x)^2 + (Y-y)^2}\right) dx dy \quad (6)$$

Dans l'approximation de Fraunhofer, cela devient :

$$E(M) \propto \exp(ikOM) \iint tr(x, y) \exp\left(-ik\frac{xX}{OM}\right) \exp\left(-ik\frac{yY}{OM}\right) dx dy \quad (7)$$

On reconnaît immédiatement la transformée de Fourier de la fonction de transparence $\mathcal{F}[tr]$:

$$E(M) \propto \exp(ikOM) \mathcal{F}[tr] \left(\frac{kX}{OM}, \frac{kY}{OM} \right) \quad (8)$$

$$I(M) \propto \left| \mathcal{F}[tr] \left(\frac{kX}{OM}, \frac{kY}{OM} \right) \right|^2 \quad (9)$$

La diffraction de Fraunhofer est remarquable car c'est un phénomène physique qui nous donne un accès direct à l'amplitude de la transformée de Fourier spatiale de la fonction transparence d'une surface quelconque.

Cela permet notamment d'effectuer physiquement des opérations de filtrage. Bloquez le centre de la tâche de diffraction à l'aide d'une tête d'épingle, vous obtiendrez un filtre passe haut. À l'inverse, coupez les tâches secondaires à l'aide d'un diaphragme, et vous obtiendrez un passe bas.

Expérience d'Abbe

On crée une source à peu de rayons parallèles à l'aide d'un laser+condenseur+lentille L1. Placé ensuite une seconde lentille L2. Dans le plan objet de la lentille se trouve l'image de la source. Ce plan contiendra la figure de diffraction (on parle de plan de Fourier). Place ensuite un objet diffractant (avec une grille ça marche très bien) juste derrière la lentille L1. En éloignant l'écran du plan de Fourier, on finit par voir apparaître l'image de la grille à travers la lentille L2. À présent, placez une fente de taille et d'orientation réglable au niveau du plan de Fourier. Centrez bien votre

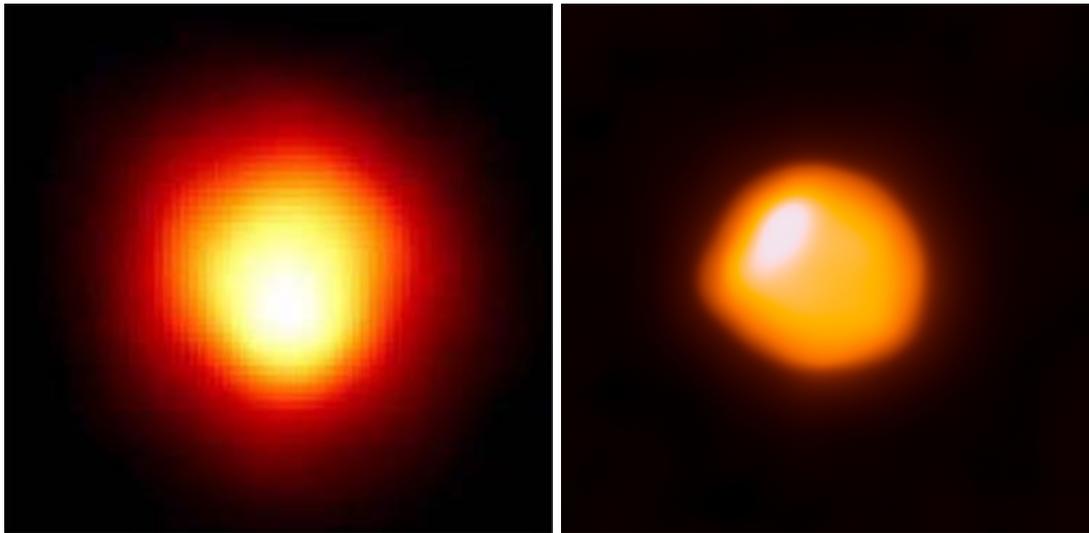


FIGURE 4 – Bételgeuse vu par Hubble (gauche) et ALMA (890 μm) (droite)

fente, et utilisez la pour couper les hautes fréquences selon une direction. Et alors, magie ! L'image de la grille perd les lignes selon l'autre direction. Ouvrez la fente pour les voir réapparaître. Tournez la fente de 90° pour supprimer les lignes selon l'autre direction.

Conclusion

La diffraction de Fraunhofer est le résultat d'une double approximation : d'abord l'approximation apportée par le principe de Huygens-Fresnel (qui, seul, nous donne la diffraction de Fresnel) ; puis l'approximation dite du champ lointain caractériser par un nombre de Fresnel $F = \frac{a^2}{\lambda D}$ très faible devant 1.

Dans les conditions de Fraunhofer, la tâche de diffraction est directement proportionnel à l'amplitude de la TF de la fonction de transparence de l'objet diffractant, ce qui en fait un phénomène particulièrement remarquable.

Toutefois, la diffraction apporte aussi son lots de déboires. En effet, elle limite la résolution des instruments optiques. Pour dépasser cette limite, il faut sortir du cadre de la diffraction de Fresnel/Fraunhofer. En effet, lorsqu'on est en champ très proche (quand le principe de Huygens Fresnel n'est lui même plus applicable), on trouve des ondes électromagnétiques évanescentes. Celles-ci sont observables à des distances inférieur à $\sqrt{\frac{a^3}{\lambda}}$. Ainsi, en plaçant une sonde tout près de l'objet, on peut cartographier la figure de diffraction en champ très proche (champ proche réactif), ce qui permet, via un traitement numérique, de produire une image très précise de l'objet diffractant. On parle de microscopie en champ proche. Cette technique permet d'obtenir des résolution de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres.