D20 – Diffraction par des structures périodiques

20 juin 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

- ➢ Optique Géométrique
- ➢ Diffraction de Fraunhofer
- ➢ Interférence à deux ondes
- ➢ Transformée de Fourier

Expériences

- Mesure longueur d'onde des raies du Cadmium connaissant les raies du mercures (lampe mercure/cadmium)
- Diffraction des électrons par le graphite

Table des matières

Introduction

Dans les leçons précédents, nous avons étudié la diffraction et les interférences à deux ondes.
Mais que ce passe-t-il si, au lieu de faire passer de la lumière à travers deux fentes, on la fait passer à travers N fentes ?
C'est ce que nous allons étudier aujourd'hui.

1 Réseau à N fentes

Dans cette section, nous allons étudié le réseau à N fentes. Les fentes seront supposées être régulièrement espacée. On notera a le pas du réseau, et b la largeur des fentes.

1.1 Interférence à N ondes

Commençons par étudier les interférences à N ondes. On suppose ici que chaque fente est une source ponctuelle.
La différence de marche entre deux rayons successifs sortant du réseau dans un direction θ est $\delta = a\sin(\theta)$. La somme des N ondes donnent donc :

$$E = \sum E_0 \exp\left(i\frac{j2\pi\delta}{\lambda}\right) = E_0 \frac{1-\exp\left(i\frac{2\pi N\delta}{\lambda}\right)}{1-\exp\left(i\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)} \tag{1}$$

L'éclairement dans le plan de Fraunhofer vaut donc :

$$I = I_0 \frac{\left(1-\exp\left(i\frac{2\pi N\delta}{\lambda}\right)\right)\left(1-\exp\left(-i\frac{2\pi N\delta}{\lambda}\right)\right)}{\left(1-\exp\left(i\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right)\left(1-\exp\left(-i\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right)} = I_0\frac{2-2\cos\left(\frac{2\pi N\delta}{\lambda}\right)}{2-2\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)} = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{\pi N\delta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)} \tag{2}$$

Code : on utilise le code python en ne montrant que la courbe de structure. On fait augmenter N : à 2 on retrouve une fonction en 1+cos (interférence à deux ondes). Quand N tend vers l'infini, la figure tend vers un peigne de dirac.

Expérience : on montre cela avec une lampe cadmium/mercure. On voit clairement des raies lumineuses de différentes couleurs : et oui ! Comme les longueurs d'onde sont différentes, les figures d'interférences le sont également. On comprend l'utilité des réseaux pour faire des analyse spectrale. On montre les ordres successifs. A l'ordre 0, tout les raies sont au même endroit (on voit une raie blanche). A partir de l'ordre 1, les raies ne sont plus conjointes. Plus l'ordre augmente, plus les raies sont espacées les unes des autres. On réalise la mesure quantitative des raies de cadmium (on suppose celle du mercure connue afin de "calibrer" la figure d'interférence.

Peut-on les éloigner indéfiniment ? Non ! Car il existe un ordre maximal (défini par $\delta = a\sin(\theta) < a$).
Par ailleurs, les raies sont de moins en moins lumineuse quand l'ordre augmente, pourquoi ?

1.2 Diffraction sur N fentes

On a vu dans la leçon diffraction de Fraunhofer que, pour un point $M = (X, Y)$ du plan de Fraunhofer, le champ diffracté à travers un objet de transparence $tr(x, y)$ est :

$$E(X,Y) \propto \int\int tr(x,y)\exp\left(-ik\frac{xX}{OM}\right)\exp\left(-ik\frac{yY}{OM}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

On reconnait la transformée de Fourier de la transparence $\mathcal{F}[tr]$
Ainsi, dans l'approximation de Fraunhofer, l'éclairement observé au point M vaut :

$$I(X,Y) \propto \left|\mathcal{F}[tr]\left(\frac{kX}{OM},\frac{kY}{OM}\right)\right|^2 \tag{4}$$

Quel est la fonction transparence de notre réseau ? Il s'agit d'une somme de fonction porte :

$$tr(x) = \sum_{j=0}^{N-1}\Pi\left(\frac{x-ja}{b}\right) = \int\sum_{j=0}^{N-1}\delta(x-ja-u)\Pi\left(\frac{u}{b}\right)\mathrm{d}u \tag{5}$$

On peut cette suite de porte comme le produit de convolution entre une fonction porte de largeur b centrée sur 0 et une suite de N diracs.

Table des longueurs d'ondes
des raies de la lampe Hg Cd Zn

sin = n . k . k = 1 n = 754 traits/mm

Mercure :

Couleur	en nm	Intensité	sin	(°)
Violet	404,7	18	0,305	17,77
Bleu	435,8	18	0,329	19,18
Vert	546,1	20	0,412	24,32
Jaune/Orange	577	18	0,435	25,79
Jaune/Orange	579,1	18	0,437	25,89

Cadmium :

Couleur	en nm	Intensité	sin	(°)
Bleu	467,8		0,352	20,65
Bleu	480,0		0,362	21,22
Vert	508,6		0,383	22,55
Rouge	643,8		0,485	29,04

Zinc :

Couleur	en nm	Intensité	sin	(°)
Bleu	468		0,353	20,66
Bleu	472,2		0,356	20,86
Bleu	481,1		0,363	21,27
Rouge	636,2		0,485	28,67

Or, la transformée de Fourier possède une propriété bien pratique : la TF d'un produit de convolution est le produit des TF !

Ainsi, nous n'avons pas besoin de faire des calculs supplémentaires. La figure de diffraction d'un réseau de N fentes sera égale au produit de la figure d'interférence à N onde et de la figure de diffraction d'une fente.

On a ainsi :

$$I \propto \text{sinc}\left(\frac{\pi b}{\lambda}\frac{X}{OM}\right)\frac{\sin^2\left(\frac{\pi N\delta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)} \tag{6}$$

Code : On montre cela avec le programme python.

On sait désormais pourquoi les ordres élevés sont aussi moins lumineux !

2 Performance d'un réseau

Comme nous venons de le voir, un réseau est très pratique pour réaliser une étude spectrale.

Mais quelle précision pouvons nous atteindre ? Quel est le pouvoir de résolution d'un réseau, et comment l'améliorer ?

2.1 Résolution spectrale

La résolution spectrale est défini comme $\lambda/\Delta\lambda$. On se place sur une raie d'ordre p :

$$\frac{\pi\delta}{\lambda} = p\pi \tag{7}$$

La première annulation intervient lorsque :

$$\frac{\pi N\delta}{\lambda + \Delta\lambda} = p\pi N - \pi \tag{8}$$

On en déduit $\lambda/\Delta\lambda = pN$.

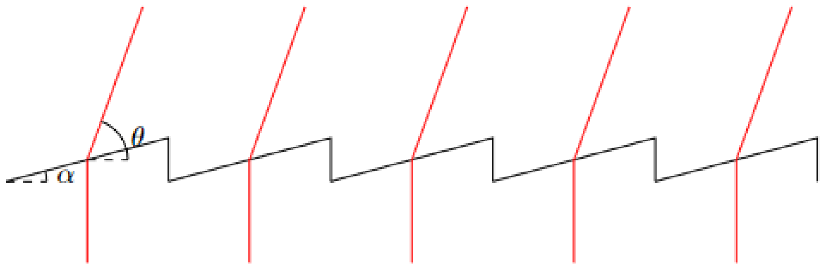
Le réseau possède plusieurs avantage par rapport au prisme. Déjà, la relation entre angle et longueur d'onde est linéaire, mais surtout la résolution est largement meilleure (de l'ordre de 1000 pour un prisme). Pour le prisme, la déviation est piloté par l'indice de refraction $n = A + B/\lambda^2$.

La résolution du réseau est donc limitée par le nombre de trait, et par l'ordre maximal p_{max}. Problème : à cause de la taille non nulle des fentes, la luminosité des ordres élevés diminue ! Comment changer cela ?

2.2 Réseau blazé

Un réseau blazé est un réseau avec un profil en dans de scie. Il est le plus souvent utilisé en réflexion, mais peu aussi l'être en transmission.

Quelle est la fonction transparence d'un élément (une dent) de ce réseau ? On notera Δn la différence d'indice optique entre le milieu et l'extérieur, ainsi que α l'angle entre de la dent avec le réseau.



$$tr(x) = \Pi(x/a)\exp(i\Delta nkx\tan(\alpha)) \tag{9}$$

Or, une des propriété des TF est que $TF(g(x)\exp(iX_0x) = TF(g)(X - X_0)$

Le réseau blazé va donc avoir pour effet de décaler le sinus cardinal : au lieu d'être centrée sur l'ordre 0 (qui n'est pas très intéressant), on peut le placer sur l'ordre 1 ou 2.

Expérience : on montre cela avec le code, et en vrai si on a un réseau blazé à disposition.

3 cristallographie par diffraction

Nous venons de voir comment un réseau peu nous aider à analyser de la lumière, mais l'inverse est également vrai : on peut analyser une structure périodique en regardant sa figure de diffraction.

Pour cette partie, regarder le plan de Clément Cabart.

On montre la diffraction d'électron sur le graphite (TP électromagnétisme p66)

Conclusion

Aujourd'hui, nous avons vu que la diffraction sur un réseau périodique est très particulière : quand on fait tendre le nombre de maille vers l'infini, la figure de diffraction tend vers un ensemble de dirac. Cela est directement lié aux TF : la TF d'un signal périodique est un peigne de dirac.

Cela peut servir à analyser finement les raies d'un spectre, mais également à déterminer la structure des cristaux. Cela en fait un des outils les plus importants de la physique moderne.