D24 – Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

16 juin 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

- Oscillateur
- Mécanique du point
- Electrocinétique
- Fonction de transfert
- Corde vibrante
- Fabry-Pérot

Expériences

- Filtre RLC
- Corde de Melde

Table des matières

Introduction

On trouve de nombreux exemple de résonance dans la vie courante : de l'instrument de musique jusqu'à la balançoire. Mais les phénomènes de résonances interviennent dans énormément de domaine de la physique, depuis le fonctionnement des cavités lasers jusqu'à la structure de la ceinture principale d'astéroïde, en passant par l'amplitude des marées.

1 Résonance à 1 degré de liberté

1.1 Définition

On parle de résonance d'un oscillateur lorsque la réponse de celui-ci à une excitation périodique atteint sont maximum. En notant $H(j\omega)$ la fonction de transfert, il y a résonance lorsque $|H(j\omega_r)| = max(|H(j\omega)|)$. ω_r est alors appelé la fréquence de résonance.

1.2 Oscillateur RLC

Prenons l'oscillateur le plus simple que vous connaissez : le circuit RLC. Dans cet oscillateur, l'énergie passe périodiquement de la forme électrique (tension au borne du condensateur) à magnétique (courant dans la bobine). La résistance du système implique une dissipation de l'énergie par effet joule.

La loi des mailles nous dit :

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + s(t) \tag{1}$$

Par ailleurs, aux bornes du condensateur, $i = C\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, d'où :

$$e(t) = RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + s(t) \tag{2}$$

On en déduit la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega - LC\omega^2} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{3}$$

Avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité.

La résonance est atteinte lorsque $|H(j\omega)|$ est à son maximum, c'est à dire lorsque :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right] = 0 \qquad\qquad \omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \tag{4}$$

Expérience : On trace le diagramme de bode d'un filtre RLC, et on mesure son coefficient de qualité Q (fréquence de résonance sur bande passante à -3db).

1.3 Généralisation

L'oscillateur RLC est l'archétype du résonateur à un degré de liberté (ici la tension imposée par l'opérateur au circuit). Mais cet oscillateur peut être généralisé à d'autre domaine de la physique. Ainsi, pour une masse relié à un ressort et soumise à une excitation extérieure e et à une force de frottement fluide :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - f\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + e \tag{5}$$

$$e = f\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx \tag{6}$$

On retrouve une équation de la même forme que celle de l'oscillateur RCL. Ainsi, la masse relié à un ressort et le circuit RLC auront des comportement analogues l'un et l'autre.

2 Résonance à N degrés de liberté

Nous venons de voir ce qu'il se produit lorsqu'on a un oscillateur simple avec un unique degré de liberté. Mais que se passe-t-il si on augmente les degrés de liberté ?

2.1 Deux oscillateurs couplés

Une bonne manière du multiplier les degrés de liberté, c'est tout simplement de coupler plusieurs oscillateur à 1 degré de liberté.

Prenons un deux oscillateurs masse-ressort (masse m,raideur k, longueur à vide a). On les relie par un autre ressort de raideur K et de longueur à vide b. En l'absence de forçage, on a les équations sont :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = -k(x_1-a) - K(x_1-x_2+b) \tag{7}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = -k(x_2-a-b) - K(x_2-x_1-b) \tag{8}$$

On peut changer les variables : $x_1' = x_1 - a$ et $x_2' = x_2 - a - b$.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_1'}{\mathrm{d}t^2} = -k(x_1') - K(x_1'-x_2') \tag{9}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = -k(x_2') - K(x_2'-x_1') \tag{10}$$

On pose $u_1 = x_1' + x_2'$ et $u_2' = x_1' - x_2'$. Les équations deviennent :

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} = -ku_1 \tag{11}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} = -ku_2 - 2Ku_2 \tag{12}$$

On voit clairement deux modes : l'un avec un pulsation propre $\omega_S = \sqrt{k/m}$ et l'autre avec une pulsation propre $\omega_A = \sqrt{(k+2K)/m}$.

Si a présent on excite le système en bougeant une paroi à la pulsation ω, on obtient (on notation complexe) :

$$-\omega^2U_1 + \omega_S^2U_1 = E \qquad U_1 = \frac{1}{\omega_S^2-\omega^2}E \tag{13}$$

$$-\omega^2U_2 + \omega_A^2U_2 = E \qquad U_2 = \frac{1}{\omega_A^2-\omega^2}E \tag{14}$$

Il y a deux résonance possibles, l'une correspondant au mode symétrique, l'autre au mode asymétrique. Dans notre cas, l'amplitude tend vers l'infini quand la pulsation égale celle d'une des deux résonances. C'est à cause du fait qu'on a négligé les effets dissipatifs.

Un système résonant à deux degrés de liberté possèdent deux fréquences de résonances. On peut généraliser : un système à n degrés de libertés possède n résonances.

2.2 Limite continue

On peut se demander ce qu'il se passe si on couple une infinité d'oscillateur infinitésimaux. C'est exactement ce que l'on fait pour modéliser le câble coaxiale ou la corde de Melde (voir leçon ondes stationnaires, onde progressives).

L'équation régissant ces systèmes est la l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{15}$$

Si on excite une corde (ou un câble coaxial) semi-infini avec un fréquence ω, il se propage une onde d'équation $A\cos(kx-\omega t)$ avec $k = \omega/c$.

Il n'y a plus de résonance, ou plutôt, en passant à la limite continue (une infinité d'oscillateur), on obtient une infinité de fréquence de résonance. Comme en plus on suppose une corde/câble infini, on a une infinité continue de fréquence de résonance. Autrement dit, on résonne à toutes les fréquences (ou à aucune, ce qui revient au même).

Si maintenant on considère une corde finie, avec certaines conditions aux limites, on va retrouver des résonances discrètes : il y en aura toujours une infinité (on a toujours une infinité d'oscillateurs),mais une infinité discrète.

Supposons qu'on fixe les extrémités de la corde de longueur L. L'onde va alors se refléter aux extrémités, avec un certain coefficient de réflexion R (valant 1 si la fixation est parfaite). On envoie une onde $u_1 = A_0\exp(j(kx-\omega t)$. L'onde réfléchie sera alors d'équation $u_2 = RA_0\exp(j(-kx-\omega t+2KL+\pi)$. Cette se réfléchit elle aussi à l'extrémité $x=0$: $u_3 = R^2A_0\exp(j(kx-\omega t+2KL+2\pi)$.

On peut écrire l'onde finale comme :

$$u_{tot} = \sum_{i=0} R^{2i} A_0 \exp\left[j(kx - \omega t + 2ikL)\right] + \sum_{i=0} R^{2i+1} A_0 \exp\left[j(-kx - \omega t + 2ikL + \pi)\right] \tag{16}$$

$$u_{tot} = A_0 \exp(-j\omega t) \left[\sum_{i=0} R^{2i} \exp\left[j(kx + 2ikL)\right] + \sum_{i=0} R^{2i+1} \exp\left[j(-kx + 2ikL + \pi)\right]\right] \tag{17}$$

$$u_{tot} = A_0 \exp(-j\omega t) \left[\exp(jkx) \sum_{i=0} R^{2i} \exp(j2ikL) - R \exp(-jkx) \sum_{i=0} R^{2i} \exp(j2ikL)\right] \tag{18}$$

$$u_{tot} = A_0 \exp(-j\omega t) \frac{\exp(jkx) - R \exp(-jkx)}{1 - R^2 \exp(2jkL)} \tag{19}$$

$$u_{tot} = A_0 \exp(-j\omega t) \frac{2jR \sin(kx) + (1 - R) \exp(jkx)}{1 - R^2 \exp(2jkL)} \tag{20}$$

On voit peut séparer le signal en deux ondes : une onde progressive et une onde stationnaire. Si on fait tendre R vers 1, alors seul l'onde stationnaire reste.

Les résonances correspondent aux minimum de $|1-R^2 \exp(2jkL)|$, c'est à dire lorsque la longeure d'onde $\lambda_p = 2L/p$, p étant un entier.

Expérience : On montre les résonances de la corde de Melde. On vérifie la loi de vitesse dans la corde.

3 Universalité du phénomène de résonance

3.1 Fabry-Perot

Pourquoi a-t-on fait tout ce calcul relou (hormis pour dire au jury : "LOL JE SAIS CALCULER !") ? Et bien parce que c'est exactement le même calcul qui sert pour trouver les résonances d'une cavité Fabry-Perot ! Sauf que dans le Fabry-Perot, c'est l'onde sortante (progressive) qui nous intéresse, alors que pour la corde, c'est l'onde stationnaire. Néanmoins les deux systèmes sont analogues !

Voir la leçon Interférométrie à Division d'amplitude pour plus de détail.

3.2 Résonances gravitationnelles

Les planètes du systèmes solaires interagissent gravitationnellement les unes avec les autres. Nous ne considérerons que le Soleil et Jupiter, et nous considérerons que les autres corps ont des masses négligeables.

Chaque fois qu'un corps est en conjonction avec Jupiter, celle-ci "tire" l'astre vers elle, changeant légèrement son orbite. Imaginons une orbite circulaire qui subit une petite perturbation. Au premier ordre, le demi-grand axe de change pas (Jupiter "tire" perpendiculairement à la trajectoire de l'orbite). Par contre la direction change : l'orbite devient légèrement plus elliptique (dans l'axe perpendiculaire à l'axe Soleil-corps-Jupiter). Les conjonctions ont lieu toutes les périodes synodiques corps-jupiter (revoir la definition sur wikipedia si besoin). Si les périodes des deux astres (le corps étudié et Jupiter) sont quelconque, alors c'est augmentation de l'excentricité ont lieu selon des axes quelconques aussi, et s'annule en moyenne sur le temps long. L'évolution de l'excentricité au cours du temps suit alors un régime périodique (96000 ans pour Mars).

Mais si jamais la période de révolution de Jupiter est proche d'être un nombre entier de fois la période du corps d'intérêt, alors les conjonctions ont lieu sur des axes proches les uns des autres d'une fois sur l'autre. Les petite perturbation se cumulle, l'excentricité augmente fortement. Cela explique les "trou" dans la ceinture d'astéroïde au niveau des résonnances avec Jupiter, ou encore dans les anneaux de Saturne.

3.3 Résonances des marrées

L'efficacité des marées est intrinsèquement lié à la proximité entre la fréquence d'excitation (11h35mn) et les fréquences de résonances du bassin océanique.

Conclusion

Nous avons vu que les phénomènes de résonances sont transverses à la physique : les mêmes systèmes d'équation décrive un câble coaxiale, une corde de Melde ou une cavité Fabry-Pérot.

Par ailleurs, repérer les résonances permet de comprendre qualitativement des éléments de physique par ailleurs très complexes, comme les résonances gravitationnelles.