D3 – Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.

29 mai 2021

& Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

- Description Eulérienne et Lagrangienne
- Fluide parfait
- Équation d'Euler

Expériences

- expérience de Stokes, écoulement couette cylindre
- chute d'une bille dans un liquide visqueux ?
- écoulement poiseuille ?

Table des matières

Remarque : Attention, dans ce plan la manip quantitative est à la fin ! Bien faire attention au temps quitte à ne pas trop développer certains calculs.

Introduction

Dans la leçon précédente sur les fluides parfait, nous avons établit l'équation d'Euler :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right)=-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g} \tag{1}$$

Mais cette description des fluides reste incomplète, comme on peut le montrer avec une expérience simple.

Expérience de Stokes

On réalise l'expérience de Stokes de l'écoulement Couette cylindre (cf TP divers p22)
Le fait de bouger le cylindre entraine la mise en mouvement du fluide. Il y *diffusion* du mouvement. Par ailleurs, le processus semble réversible.
C'est ce type d'écoulement que nous allons tenter de comprendre aujourd'hui.

1 Fluides visqueux

1.1 Diffusion de la quantité de mouvement

Supposons une particule fluide se déplaçant à une vitesse v. Supposons que la particule fluide adjacente se déplace, elle, à une vitesse légèrement différente $v+\delta v$. Les deux particules vont alors échanger de la quantité de mouvement : à l'échelle microscopique, les particules en moyenne plus rapide de l'une vont s'échanger ou entrechoquer les particules en moyenne plus lente de l'autre.

Le mouvement se diffuse dans le fluide. On montre la petite animation d'un écoulement couette plan.

1.2 Contrainte et déformation

1.2.1 Tenseur déformation

Prenons une particule fluide. Nous voulons savoir comment celle-ci se déforme. Pour cela, on peut regarder la différence entre les vitesses des différentes parois de la particule (on comprend bien que si elle se déforme, c'est que ses parois ont des vitesses différentes.

On introduit donc le tenseur gradient de vitesse :

$$G_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2}$$

Ce tenseur peut être séparée en deux composantes, une symétrique et une antisymétrique :

$$G_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=e_{ij}+\omega_{ij} \tag{3}$$

Le premier tenseur, e_{ij}, symétrique, est le tenseur déformation. Le second, ω_{ij} est le tenseur rotation. Celui ne fait qu'exprimer la vorticité du fluide :

$$[\omega]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-\omega_3&\omega_2\\\omega_3&0&-\omega_1\\-\omega_2&\omega_1&0\end{pmatrix} \tag{4}$$

Avec $\vec{\omega}=\vec{\nabla}\wedge\vec{u}$ le vecteur vorticité.

C'est le tenseur déformation qui va nous intéresser. Comme celui-ci est symétrique, il est également diagonalisable, et ses vecteurs propres sont orthogonaux (théorème spectral). Il existe donc une base dans laquelle la déformation est caractérisée par trois valeurs propres :

$$[e]=\begin{pmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{pmatrix} \tag{5}$$

Si γ_i est positif, la particule se dilate dans cette direction. Dans le cas contraire elle se contracte. On remarque donc que la non-compressibilité d'un fluide se traduit par le fait d'avoir $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$

1.2.2 Tenseur contrainte

La force s'exerçant sur un élément de surface $\mathrm{d}\vec{S}$ peut être relié à cet élément de surface par un tenseur de contrainte :

$$\mathrm{d}F_i = \sigma_{ij}\mathrm{d}S_j \tag{6}$$

Considérons une particule fluide cubique $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Celle-ci possède 6 faces sur lesquelles s'exercent les forces surfaciques.

On peut montrer que la somme des moments est nulles (sinon l'accélération de la rotation de la particule fluide tend vers l'infini quand on fait tendre son volume vers 0). Cela se traduit par le fait que le tenseur $[\sigma]$ doit être symétrique.

On peut par ailleurs subdiviser $[\sigma]$ en deux entités : d'un côté les termes diagonaux, qui correspondent aux forces s'exerçant selon l'axe normal aux surfaces. La pression fait partie de celle-ci. Les termes non diagonaux, eux, représentent les forces tangentielles aux surfaces.

On définit σ'_{ij} le tenseur des contraintes autres que la pression :

$$\sigma_i j = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \tag{7}$$

1.3 Fluide Newtonien incompressible

Tout ça c'est bien beau, mais pour pouvoir décrire notre fluide, il faut pouvoir relier les contraintes (aka les forces s'exerçant sur la particule fluide) à l'écoulement.

Comme nous l'avons vu, le tenseur contrainte $[\sigma']$ est symétrique. Nous allons donc le relié à la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse, c'est à dire au tenseur déformation $[e]$.

On définit un fluide Newtonien comme un fluide pour lequel les contraintes et déformations sont relié par une équation linéaire :

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl}e_{kl} \tag{8}$$

A_{ijkl} est un tenseur d'ordre 4, il contient 81 composantes ! Heureusement, on peut grandement simplifier cette équation en supposant que le milieu est isotrope et en utilisant les symétries de $[\sigma']$ et $[e]$. On a alors :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij} + B\delta_{ij}e_{ll} \tag{9}$$

Cette expression peut encore être simplifié si on considère un fluide incompressible. On a alors $e_{ll} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, et donc :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij} \tag{10}$$

1.4 Équation de Navier-Stokes

Appliquons le PFD à une particule fluide :

$$\iiint \rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}^3\tau = \sum \vec{F}_{ext} \tag{11}$$

Avec les forces volumiques et surfaciques :

$$\vec{F}_V = \iiint \rho\vec{g}\,\mathrm{d}^3\tau \qquad\qquad \vec{F}_S = \oiint [\sigma]\mathrm{d}^2\vec{S} = \iiint \vec{\nabla}\cdot[\sigma]\mathrm{d}^3\tau \tag{12}$$

On obtient le PFD local :

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot[\sigma] \tag{13}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot(-p[I] + [\sigma']) \tag{14}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + 2\eta\vec{\nabla}\cdot[e] \tag{15}$$

Regardons le dernier terme de cette équation, qui n'est pas trivial à simplifier.

$$\left(\vec{\nabla}\cdot[e]\right)_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{16}$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot[e]\right)_i = \frac{1}{2}\left(\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}_i + \left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\right)_i\right) \tag{17}$$

Comme on a déjà supposé que le fluide est incompressible, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. On a donc $\vec{\nabla} \cdot [e] = \frac{1}{2}\Delta\vec{u}$.

Nous obtenons finalement l'équation de Navier-Stokes décrivant les fluides Newtoniens incompressibles :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\right) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{u} \tag{18}$$

Remarque : le nouveau terme que nous avons introduit est un terme de diffusion de la quantité de mouvement, ce qui rejoint notre première intuition du début de leçon. Remarque : Comme se terme est un terme de diffusion, il introduit une irréversibilité : inverser l'axe des temps ne redonne pas la même équation. Pourtant, nous avons vu avec la toute première expérience (couette plan cylindrique) que l'écoulement semblait réversible. Pourquoi ? On va voir ça à la prochaine section.

η est la viscosité dynamique du fluide. Elle s'exprime en Pa.s. On rencontre aussi la viscosité cinématique, notée $\nu = \eta/\rho$, qui elle est en m^2/s.

Voici quelques ordres de grandeurs de viscosité dynamique pour différent fluide. Air : $2 \cdot 10^{-5}$, eau : 10^{-3}, encre : 2, miel : 10 Pa.s.

On trouve donc des viscosités très différentes. La page wikipedia montre une animation de deux fluides de viscosités différentes.

1.5 Condition aux limites

. Nous avions vu que, pour un fluide parfait, la composante de la vitesse normal à l'interface devait être nulle (ou de la même vitesse que l'interface si celle-ci bouge, par exemple une interface liquide/liquide).

Dans le cas d'un fluide visqueux, on a une condition plus forte, dite de non glissement : la vitesse du fluide tend vers la vitesse de l'interface à l'approche de celle-ci, et ce dans la direction tangentielle aussi bien que normal.

2 Écoulement laminaire

2.1 Nombre de Reynolds

L'équation de Navier-Stokes est très complexe à résoudre (aucune solution général n'a pour l'instant était trouvée). Voyons donc si nous ne pourrions pas, dans certain cas, négliger certains termes. On note L, U et T les taille, vitesse et temps caractéristiques du système.

On définit le nombre de Reynolds (sans dimension) comme le rapport entre les grandeurs caractéristique du terme convectif et du terme visqueux :

$$Re = \frac{[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}]}{[\nu\Delta\vec{u}]} = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho UL}{\eta} \tag{19}$$

On peut aussi regarder un autre nombre dans dimension :

$$N = \frac{[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}]}{[\nu\Delta\vec{u}]} = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{L^2}{\nu T} = \frac{\rho L^2}{\eta T} \tag{20}$$

C'est nombre sont très importants en mécanique des fluides. En effet, s'ils sont tout deux inférieur à une certaine valeur critique (dépendante du système), alors on peut considérer que la quantité de mouvement se diffuse quasi instantanément dans le système. On parle alors d'écoulement laminaire. Dans le cas contraire, l'écoulement est turbulent. Cette vidéo montre la transition entre écoulement laminaire et écoulement turbulent.

Remarque : Souvent, on ne retient que le nombre de Reynolds comme critère. En effet, la situation Re petit mais N grand correspond à un fluide visqueux oscillant à haute fréquence, une situation très particulière donc.

2.2 Equation de Stokes

Si le nombre de Reynolds est petit (selon les systèmes, la transition se trouve entre 50 et 2500) alors on est en régime laminaire. L'équation de Navier-Stokes se simplifie en l'équation de Stokes :

$$0 = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \nu\Delta\vec{u} \tag{21}$$

Remarque : Cette équation est linéaire et réversible. On retrouve donc bien le caractère réversible que nous avions observé dans l'expérience introductive.

Remarque : L'information se déplace instantanément dans le fluide : un changement des conditions au limites change instantanément tout l'écoulement. Dit autrement, quand on considère un écoulement laminaire, on néglige les transitions d'un écoulement à l'autre.

2.3 Exemple d'écoulement Laminaire

2.3.1 Écoulement dans une canalisation

Soit une canalisation d'eau circulaire de rayon R et de longueur L, à laquelle nous appliquons une différence sur pression Δp. On suppose que l'équation de Stokes s'applique (faible nombre de Reynolds, écoulement stationnaire). Par symétrie, la vitesse prend la forme $\overrightarrow{u} = u(r)\overrightarrow{e_z}$. Le gradient de pression ne dépend pas de z ni de θ. Comme par ailleurs l'intégrale du gradient de pression le long de n'importe quel droite orientée selon $\overrightarrow{e_z}$ doit être égale à Δp, on en déduit que le gradient de pression est le même dans toute la conduite et vaut $\overrightarrow{\nabla} p = \Delta p / L\overrightarrow{e_z}$. L'équation de Stokes devient :

$$\eta \left(\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r)}{\partial r} \right) = \frac{\Delta p}{L} \tag{22}$$

La solution de cette équation différentielle prend la forme :

$$u(r) = u_0 + \frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 \tag{23}$$

Les conditions aux limites (courant nul au niveau des parois) nous donne finalement :

$$u(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2) = -\frac{R^2 \Delta p}{4\eta L}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{24}$$

On peut en déduire le débit volumique à travers la conduite :

$$Q_V = \iint -\frac{R^2 \Delta p}{4\eta L}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \tag{25}$$

$$Q_V = -2\pi \frac{R^2 \Delta p}{4\eta L} \int \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) r\mathrm{d} \tag{26}$$

$$Q_V = -2\pi \frac{R^2 \Delta p}{4\eta L}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right) \tag{27}$$

$$Q_V = -\frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L} \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

Expérience : Écoulement poiseuille

On utilise un vase mariotte pour mesurer la viscosité de l'eau en utilisant la formule du débit si dessus (TP divers p.24).

2.3.2 Écoulement couette plan

retour sur la simulation

Conclusion