D4 – Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

30 mai 2021

& Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

- ➢ Description Eulérienne et Lagrangienne
- ➢ Conservation de la masse
- ➢ Conservation de la quantité de mouvement

Expériences

- Maintient d'une balle de pingpong par effet Coanda
- vidange vase Mariotte

Table des matières

paradoxe d'Alembert, effet Coanda

Introduction

Dans la leçon précédente, nous avons vu comment décrire la cinématique et la dynamique d'un fluide via la description Lagrangienne. Nous avions en particulier établit deux équations importantes. La conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho \overrightarrow{u}) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

Et la conservation de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle :

$$\iiint \rho \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}^3\tau = \sum \overrightarrow{F}_{ext}$$
$$\iiint \rho \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \rho(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{u} \mathrm{d}^3\tau = \sum \overrightarrow{F}_{ext}$$

Aujourd'hui, nous allons étudié un modèle simple de fluide : les fluides parfait.

1 Fluides parfaits

1.1 Description

Pour un fluide réelle, les particules fluides "frottent" les unes contre les autres et contre les parois : c'est la viscosité du fluide. Cela entraine deux effets : un transfert de quantité de mouvement des particules rapides vers les lentes (diffusion de la quantité de mouvement) et un effet de dissipation de l'énergie mécanique du fluide en énergie thermique.

L'approximation des fluides parfaits consiste en négliger la viscosité du fluide, considérée comme strictement nulle. Les effets de la viscosité seront étudié dans une prochaine leçon.

1.2 Equation d'Euler

Écrivons la conservation de la quantité de mouvement selon ces hypothèses. Les forces s'exerçant sur la particule fluide sont les forces volumiques (comme la gravitation) et les forces surfaciques. Comme nous négligeons la viscosité, ces dernières se limite à la pression. On a donc la somme des forces d'exerçant sur une particule fluide :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \iiint \rho \overrightarrow{g} \mathrm{d}^3\tau + \oiint (-p)\mathrm{d}^2\overrightarrow{S} = \iiint (\rho \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\nabla} p)\mathrm{d}^3\tau \tag{1}$$

On a ramené la somme des forces a une intégrale volumique, on peut donc exprimer la conservation de la quantité de mouvement par une équation locale :

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{u} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla} p + \overrightarrow{g} \tag{2}$$

Cette équation est l'équation d'Euler.

Le système contient 5 inconnues (u_x, u_y, u_z,p et ρ) pour quatre équation (3 pour l'équation d'Euler et 1 pour la conservation de la masse). Il nous faut une 5ème équation pour résoudre le système. Celle-ci est donnée par la compressibilité isentropique du fluide :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S = \chi_S \tag{3}$$

Remarque : On prend la compressibilité isentropique car l'écoulement est réversible (changer le signe du temps et de la vitesse ne change pas l'équation d'Euler ni la conservation de la masse). Cela est directement du au fait que nous avons négligé les effets dissipatifs.

2 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli décrit la conservation de l'énergie mécanique le long des lignes de courant. Il s'applique pour des écoulement parfait, stationnaire et incompressible.

2.1 Démonstration

Moyennant les hypothèse susnommées, l'équation d'Euler se ré-écrit :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \tag{4}$$

On peut ré-écrire :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\vec{u}^2\right) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} \tag{5}$$

L'équation d'Euler devient alors, avec $\vec{\omega}$ la vorticité :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + p + \rho g z\right) = -\rho\vec{\omega} \wedge \vec{u} \tag{6}$$

La quantité entre parenthèse est la charge C. Considérons une ligne de courant décrite par l'abscisse curviligne $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{u}\mathrm{d}t$. Le long de cette ligne on a :

$$\mathrm{d}C = -\rho(\vec{\omega} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{u}\mathrm{d}t = 0 \tag{7}$$

La charge C est donc conservé le long des lignes de courant. Mieux, si la vorticité est nulle (écoulement irrotationnel), alors cette charge est la même dans tout l'écoulement.

2.2 Applications

2.2.1 Vidange d'un réservoir

On réalise l'exp en même temps (voir TP divers p25).

Avec le vase Mariotte, on impose que la pression est égale à la pression atmosphérique à une hauteur h du trou. La pression au trou est également égale à la pression atmosphérique. On applique le théorème de Bernoulli entre un point A à la hauteur h et un point B du trou.

$$\frac{1}{2}\rho u_A^2 + p_0 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho u_B^2 + p_0 \tag{8}$$

La conservation de la masse :

$$\rho S_A u_A = \rho S_B u_B \tag{9}$$

En combinant ces deux équations, on obtient une expression de la vitesse au niveau du trou :

$$u_B = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}}} \simeq \sqrt{2gh} \tag{10}$$

On en déduit le débit volumique :

$$Q_V = S_B u_B = S_B\sqrt{2gh} \tag{11}$$

On mesure le débit pour différente hauteur h. Avec une régression linéaire, on remonte à la constante de gravitation.

2.2.2 Effet Venturi et Cavitation

D'après le théorème de Bernoulli, lorsque la vitesse augmente, la pression diminue (effet Venturi). Ainsi, pour un écoulement d'eau de 14m/s (facilement atteint autours d'une hélice de bateau), la pression tombe quasiment à 0 ! La pression diminue jusqu'à atteindre la pression de vapeur saturante. L'eau passe alors à l'état gazeux, des bulles se forment autours de l'hélice, c'est la cavitation.

On peut parler ici du tube de Pitot qui utilise l'effet venturi pour mesure la vitesse du vent.

2.2.3 Effet Coanda

On place une balle en suspension dans un jet d'air. La balle reste figée dans le jet, même si on incline l'ensemble ! Pourquoi ?

On réalise l'expérience

Si la balle se déplace, alors les lignes de courants s'allonge d'un côté côté et diminue de l'autre. Les particules fluides doivent parcourir les deux côté de la basse dans le même temps (incompressibilité), par conséquent l'écoulement est plus rapide du côté du déplacement de la balle que de l'autre. Il en résulte un effet venturi : la pression augmente du côté du déplacement de la balle et diminue de l'autre : la balle est ramenée au centre du jet.

2.2.4 Effet Magnus

Si on a le temps

Conclusion

Durant cette leçon, nous avons vu un modèle simple de fluide, qui néglige la viscosité (dissipation), mais nous permet déjà de décrire un certains nombres d'écoulement.

Dans une prochaine leçon, nous verrons les limites de ce modèle en ajoutant un terme de viscosité à l'équation d'Euler (équation de Navier-Stokes). Nous pourrons alors voir plus en détail dans quels circonstances l'hypothèse du fluide parfait s'applique, et dans quels cas non.